

Κινηματική στο Χώρο (3 Διαστάσεις)

Η κίνηση ενός σώματος περιγράφεται πλήρως μέσω των διανυσματικών μεγεθών της θέσης, της ταχύτητας και της επιτάχυνσης.

Διάνυσμα Θέσης ($\mathbf{r}$)

Προσδιορίζει τη θέση του σώματος σε ένα τρισδιάστατο σύστημα συντεταγμένων (x, y, z)

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

- **Μέτρο (Απόσταση από την αρχή):** $|\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Συμβολισμοί

$\mathbf{r}$: Το διάνυσμα θέσης (ξεκινά από το $(0,0,0)$ και δείχνει το σώμα).

x, y, z : Οι συντεταγμένες του σώματος στους τρεις άξονες.

$\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$: Τα **μοναδιαία διανύσματα**. Δείχνουν την κατεύθυνση των αξόνων x, y, z αντίστοιχα και έχουν μέτρο 1.

$|\mathbf{r}|$: Το μέτρο (μήκος) του διανύσματος, δηλαδή η ευθύγραμμη απόσταση από την αρχή των αξόνων.

Στιγμιαία Ταχύτητα ($\mathbf{u}$)

Ορίζεται ως ο ρυθμός μεταβολής του διανύσματος θέσης ως προς το χρόνο (παράγωγος).

$$\mathbf{u} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = u_x\mathbf{i} + u_y\mathbf{j} + u_z\mathbf{k}$$

- **Συνιστώσες:** $u_x = \frac{dx}{dt}, u_y = \frac{dy}{dt}, u_z = \frac{dz}{dt}$
- **Μέτρο:** $|\mathbf{u}| = \sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2}$

Συμβολισμοί

dt: Μια απειροελάχιστα μικρή χρονική στιγμή (μεταβολή χρόνου).

dr: Η πολύ μικρή μετατόπιση που έγινε στο χρόνο dt.

u_x, u_y, u_z: Οι ταχύτητες με τις οποίες κινείται το σώμα "παράλληλα" σε κάθε άξονα.

Στιγμιαία Επιτάχυνση (a)

Ορίζεται ως ο ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας ως προς το χρόνο.

$$a = \frac{du}{dt} = a_x i + a_y j + a_z k$$

- **Συνιστώσες:** $a_x = \frac{du_x}{dt}$, $a_y = \frac{du_y}{dt}$, $a_z = \frac{du_z}{dt}$
- **Μέτρο:** $|a| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$

a: Δείχνει πόσο γρήγορα αυξάνεται ή μειώνεται η ταχύτητα.



● Σχέσεις Παραγώγων και Ολοκληρωμάτων

- $r \rightarrow u \rightarrow a$ (παραγωγίζω)
- $a \rightarrow u \rightarrow r$ (ολοκληρώνω)

Στη φυσική, για να μεταβούμε από ένα μέγεθος σε άλλο, χρησιμοποιούμε τον απειροστικό λογισμό:

- **Παραγώγιση ($\frac{d}{dt}$):** Χρησιμοποιείται όταν πηγαίνουμε από τη **Θέση** $\rightarrow$ **Ταχύτητα** $\rightarrow$ **Επιτάχυνση**.
- **Ολοκλήρωση ($\int$):** Χρησιμοποιείται για την αντίστροφη πορεία: **Επιτάχυνση** $\rightarrow$ **Ταχύτητα** $\rightarrow$ **Θέση**.

Ολοκληρώματα & Νόμοι

- $u = \frac{dx}{dt} \Rightarrow dx = u \cdot dt \Rightarrow \int_{x_0}^x dx = \int_0^t u dt \Rightarrow x - x_0 = u(t - 0) \Rightarrow \mathbf{x = x_0 + ut}$
- $a = \frac{du}{dt} \Rightarrow du = a \cdot dt \Rightarrow \int_{u_0}^u du = \int_0^t a dt \Rightarrow u - u_0 = a(t - 0) \Rightarrow \mathbf{u = u_0 + at}$

Δυναμική & Νόμοι του Νεύτωνα

1ος Νόμος (Αδράνεια): Αν η συνισταμένη των δυνάμεων είναι μηδέν ($\Sigma F = 0$), το σώμα παραμένει ακίνητο ή κινείται με σταθερή ταχύτητα (E.O.K.).

2ος Νόμος (Θεμελιώδης): Η συνισταμένη δύναμη ισούται με το γινόμενο της μάζας επί την επιτάχυνση: $\Sigma F = ma$.

3ος Νόμος (Δράση-Αντίδραση): Για κάθε δύναμη δράσης F_{12} υπάρχει μια αντίθετη δύναμη αντίδρασης F_{21} , $F_{12} = -F_{21}$.

Η Ενέργεια στη Μηχανική

1. Κινητική Ενέργεια (K ή T)

Ορισμός: Είναι η ενέργεια που κατέχει ένα σώμα λόγω της κίνησής του

- **Τύπος:** $K = \frac{1}{2}mu^2$
- **Μονάδα μέτρησης:** Joule (J) στο S.I.
- **Συμβολισμοί:**
 - m : Η μάζα του σώματος (kg).
 - u : Το μέτρο της ταχύτητας (m/s).

2. Δυναμική Ενέργεια (U ή V)

Ορισμός: Είναι η ενέργεια που έχει ένα σώμα λόγω της θέσης του σε ένα πεδίο δυνάμεων (π.χ. βαρυτικό).

- **Τύπος (Βαρυτική):** $U = mgh$
- **Συμβολισμοί:**
 - g : Η επιτάχυνση της βαρύτητας ($\approx 9,8 \text{ m/s}^2$).
 - h : Το ύψος από ένα επίπεδο αναφοράς.

3. Μηχανική Ενέργεια ($E_{\text{μηχ}}$)

Ορισμός: Το άθροισμα της κινητικής και της δυναμικής ενέργειας ενός σώματος.

- **Τύπος:** $E_{\text{μηχ}} = K + U$
- **Αρχή Διατήρησης:** Αν ασκούνται μόνο συντηρητικές δυνάμεις (π.χ. βάρος), τότε η $E_{\text{μηχ}}$ παραμένει σταθερή ($E_{\text{αρχ}} = E_{\text{τελ}}$).

Έργο, Ισχύς και Θ.Μ.Κ.Ε

1. Έργο (W)

Το έργο εκφράζει τη μεταφορά ενέργειας μέσω μιας δύναμης που προκαλεί μετατόπιση. Η μονάδα μέτρησης στο S.I. είναι το **Joule (J)**.

- Σε ευθύγραμμη κίνηση:

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F dx$$

- Σε καμπυλόγραμμη κίνηση:

$$W = \int_c F \cdot dr$$

Συμβολισμοί:

- W : Έργο της δύναμης.
- F ή F : Η δύναμη που ασκείται στο σώμα.
- x_1, x_2 : Η αρχική και η τελική θέση στον άξονα κίνησης.
- dr : Το διάνυσμα της στοιχειώδους μετατόπισης πάνω στην καμπύλη c .

2. Ισχύς (P)

Η ισχύς ορίζεται ως ο ρυθμός με τον οποίο παράγεται έργο ή μεταφέρεται ενέργεια. Η μονάδα μέτρησης στο S.I. είναι το **Watt (W)**.

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{F \cdot dr}{dt} = F \cdot \frac{dr}{dt} = F \cdot v$$

Συμβολισμοί:

- P : Η ισχύς.
- $\frac{dW}{dt}$: Ο ρυθμός μεταβολής του έργου ως προς τον χρόνο.
- v : Η στιγμιαία ταχύτητα του σώματος.

3. Θεώρημα Έργου - Κινητικής Ενέργειας (Θ.Μ.Κ.Ε.)

Το συνολικό έργο όλων των δυνάμεων που ασκούνται σε ένα σώμα ισούται με τη μεταβολή της κινητικής του ενέργειας.

$$\sum W = \Delta K$$

$$\Rightarrow W_{ολ} = K_{τελ} - K_{αρχ}$$

Συμβολισμοί:

- $\sum W$ ή $W_{ολ}$: Το αλγεβρικό άθροισμα των έργων όλων των δυνάμεων.
- ΔK : Η μεταβολή της κινητικής ενέργειας.
- $K_{αρχ}, K_{τελ}$: Η αρχική και η τελική κινητική ενέργεια του σώματος αντίστοιχα.