

Ηλεκτρικό Πεδίο

1. Ηλεκτρικό Φορτίο (q)

Ορισμός: Το ηλεκτρικό φορτίο είναι μια θεμελιώδης ιδιότητα της ύλης, η οποία προκαλεί ηλεκτρικά φαινόμενα.

Μονάδα μέτρησης: 1 Coulomb (C).

2. Νόμος του Coulomb

Ο νόμος αυτός περιγράφει τη δύναμη που ασκείται μεταξύ δύο σημειακών φορτίων:

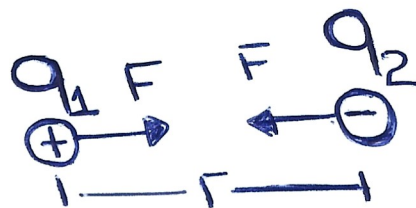
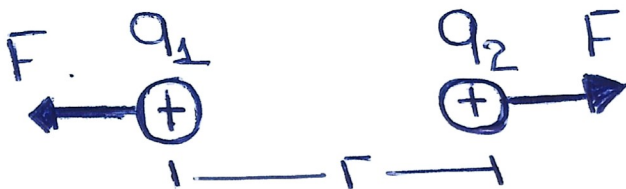
$$\vec{F} = k \frac{|q_1 \cdot q_2|}{r^2} \hat{r}$$

όπου:

- F: μέτρο ηλεκτρικής δύναμης (N)
- q_1, q_2 : τα φορτία (C)
- r: η απόσταση μεταξύ των φορτίων (m)
- k: σταθερά Coulomb, $k = 8,99 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2$



Η δύναμη είναι ελκτική όταν τα φορτία έχουν αντίθετο πρόσημο και απωστική όταν έχουν ίδιο.



3. Ηλεκτρικό Πεδίο (E)

Το ηλεκτρικό πεδίο ορίζεται ως η δύναμη που δέχεται ένα θετικό μοναδιαίο φορτίο σε ένα σημείο:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0}$$

Για σημειακό φορτίο Q:

$$\vec{E} = k \frac{|Q|}{r^2} \hat{r}$$



Μονάδα μέτρησης: N/C ή V/m.

4. Συνεχή κατανομή φορτίου

Όταν έχουμε γραμμική, επιφανειακή ή ογκομετρική κατανομή φορτίου, το ηλεκτρικό πεδίο υπολογίζεται με ολοκλήρωση:

όπου dq είναι στοιχειώδες φορτίο.

$$dE = k \frac{dq}{r^2}$$

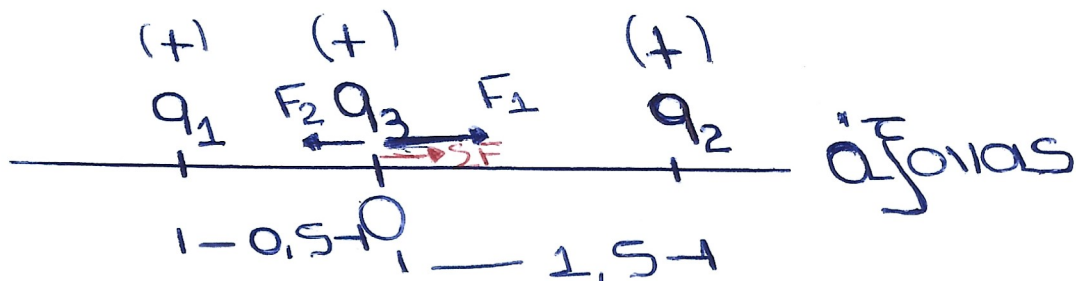
4. Αρχή Υπέρθεσης

Η συνισταμένη δύναμη ή το συνισταμένο πεδίο από πολλά φορτία προκύπτει από το διανυσματικό άθροισμα των επιμέρους

Άσκηση 1

Ένα ηλεκτρικό φορτίο $1,3\mu\text{C}$ τοποθετείται πάνω στον άξονα x και στην θέση $x = -0,5\text{m}$, ένα δεύτερο φορτίο $3,2\mu\text{C}$ βρίσκεται στον άξονα x και στη θέση $x = 1,5\text{m}$ και τέλος ένα τρίτο φορτίο $2,5\mu\text{C}$ τοποθετείται στην αρχή του άξονα. Βρείτε την συνισταμένη δύναμη που ασκείται στο φορτίο $2,5\mu\text{C}$. Όλα τα ηλεκτρικά φορτία είναι θετικά.

Λύση



$$\vec{F}_1 = k \frac{|q_3 \cdot q_1|}{r_1^2}$$

$$\Rightarrow \vec{F}_1 = 8,99 \cdot 10^9 \frac{|2,5 \cdot 10^{-6} \cdot 1,3 \cdot 10^{-6}|}{0,5^2}$$

$$\Rightarrow \vec{F}_1 = 0,117 \text{ N}$$

$$\vec{F}_2 = k \frac{|q_3 \cdot q_2|}{r_2^2}$$

$$\Rightarrow \vec{F}_2 = 8,99 \cdot 10^9 \frac{|2,5 \cdot 10^{-6} \cdot 3,2 \cdot 10^{-6}|}{1,5^2} = 0,032 \text{ N}$$

$$\begin{aligned} \Sigma F &= F_1 - F_2 \\ \Sigma F &= 0,085 \text{ N} \end{aligned}$$

Σημειώσεις - Λυμένα Θέματα

e-students.gr

© 698 93 94 741

Άσκηση 2

Ένα σημειακό φορτίο $-5,2\mu\text{C}$ βρίσκεται στην αρχή των συντεταγμένων. Βρείτε το ηλεκτρικό πεδίο (α) πάνω στον άξονα x , στο σημείο $x = 3\text{m}$, (β) στον άξονα y και στο σημείο $y = -4\text{m}$ και (γ) στο σημείο με συντεταγμένες $(2\text{m}, 2\text{m})$.

α) στο σημείο $(3,0,0)$

$$r = \sqrt{3^2 + 0^2 + 0^2} = 3\text{m}$$

$$E = k \frac{Q}{r^2} = 8,99 \cdot 10^9$$

$$\frac{5,2 \cdot 10^{-6}}{3^2}$$

$$E = 5,2 \cdot 10^3 \text{ N/C}$$



β) $(0,-4,0)$

$$r = \sqrt{0^2 + (-4)^2 + 0^2} = 4\text{m}$$

$$E = k \frac{Q}{r^2} = 2,9 \cdot 10^3 \text{ N/C}$$

Q



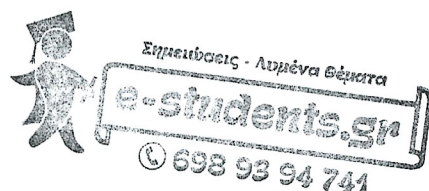
γ) $(2,2)$

$$r = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8}\text{m}$$

$$E = k \frac{Q}{r^2} = 5,8 \cdot 10^3 \text{ N/C}$$



Q



5. Γραμμικής Πυκνότητας Φορτίου (λ)

Η γραμμική πυκνότητα φορτίου ορίζεται ως το φορτίο ανά μονάδα μήκους ενός αγωγίμου ή φορτισμένου νήματος/γραμμής:

$$\lambda = \frac{Q}{L}$$

όπου:

Q: το συνολικό φορτίο (C)

L: το μήκος της γραμμής (m)

Μονάδα μέτρησης: C/m

Για Στοιχειώδες Φορτίο (dq)

Σε ένα απειροστό στοιχείο μήκους dx της γραμμής:

$$dq = \lambda dx$$



Άσκηση 3

Μία ευθεία γραμμή φορτίων κείται κατά μήκος του άξονα x και εκτείνεται από το σημείο $x = +x_0$ μέχρι το θετικό άπειρο. Η γραμμή έχει σταθερή γραμμική πυκνότητα φορτίου λ_0 (φορτίο ανά μονάδα μήκους). Ποιο είναι το μέτρο και η κατεύθυνση του ηλεκτρικού πεδίου στην αρχή των συντεταγμένων;

$$\begin{aligned} dE &= k \frac{dq}{r^2} \Rightarrow E = \int_{x_0}^{+\infty} k \frac{dq}{r^2} \\ \Rightarrow E &= \int_{x_0}^{+\infty} k \frac{\lambda_0 dx}{x^2} = k \lambda_0 \int_{x_0}^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx \\ \Rightarrow E &= k \lambda_0 \int_{x_0}^{+\infty} x^{-2} dx \end{aligned}$$

$$\Rightarrow E = k\lambda_0 \lim_{b \rightarrow \infty} \int_{x_0}^b x^{-2} dx$$

$$\Rightarrow E = k\lambda_0 \lim_{b \rightarrow \infty} \left[-x^{-1} \right]_{x_0}^b$$

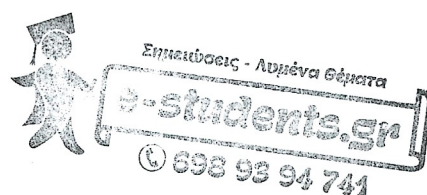
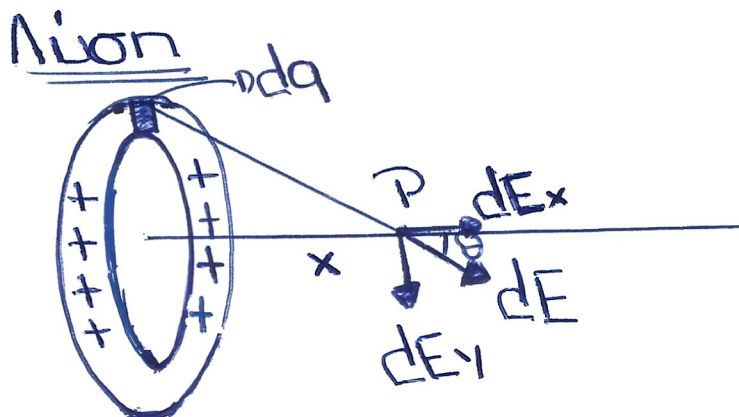
$$\Rightarrow E = k\lambda_0 \lim_{b \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{b} - \left(-\frac{1}{x_0} \right) \right]$$

$$\Rightarrow E = k \frac{\lambda_0}{x_0}$$

ΠΡΟΣ ΤΑ
ΟΡΙΟΤΕΡΑ

Άσκηση 4

Ένας ομοιόμορφα φορτισμένος δακτύλιος ακτίνας 10cm έχει ολικό φορτίο 75μC. Βρείτε το ηλεκτρικό πεδίο πάνω στον άξονα του δακτυλίου και σε απόσταση (α) 1cm, (β) 5cm, (γ) 30cm και (δ) 100cm από το κέντρο του δακτυλίου



$$dE_x = dE \cdot \cos\theta$$

$$dE_x = k \frac{dq}{r^2} \cdot \cos\theta$$

$$E_x = \int dE_x = \int k \frac{dq}{r^2} \cos\theta$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r}$$

$$\Rightarrow E_x = \int k \frac{dq}{r^2} \cdot \frac{x}{r} = \int k \frac{dq x}{r^3}$$

$$\Rightarrow E_x = k \frac{x}{r^3} \int dq \stackrel{\int dq = Q}{\Rightarrow} E_x = k \frac{x}{r^3} \cdot Q$$

$$r = (R^2 + x^2)^{1/2}$$

$$\Rightarrow E_x = k \frac{Q \cdot x}{(R^2 + x^2)^{3/2}} \quad \left| \quad E = k \frac{Q \cdot x}{(R^2 + x^2)^{3/2}} \right.$$

$$E_y = 0 \text{ (λόγω συμμετρίας)}$$

για $x = 1 \cdot 10^{-2} \text{ m}$

$$E = 9,88 \cdot 10^9 \frac{75 \cdot 10^{-6} \cdot 10^{-2}}{\left((10 \cdot 10^{-2})^2 + (1 \cdot 10)^2 \right)^{3/2}}$$

$$E = 6,6 \cdot 10^6 \text{ N/C}$$

για $x = 5 \cdot 10^{-2} \text{ m}$

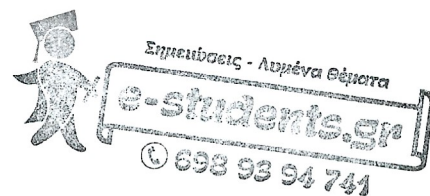
$$E \approx 2,5 \cdot 10^7 \text{ N/C}$$

για $x = 30 \cdot 10^{-2} \text{ m}$

$$E \approx 2,2 \cdot 10^6 \text{ N/C}$$

για $x = 100 \cdot 10^{-2} \text{ m}$

$$E \approx 6,6 \cdot 10^5 \text{ N/C}$$



6. Επιφανειακή Πυκνότητα Φορτίου

$$\sigma = \frac{Q}{A}$$

όπου:

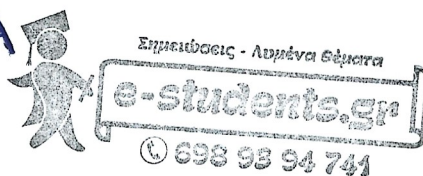
σ : επιφανειακή πυκνότητα φορτίου (μονάδα: C/m²)

Q : συνολικό φορτίο (C)

A : επιφάνεια κατανομής (m²)

Σχέση με στοιχειώδες φορτίο:

$$dq = \sigma dA$$



7. Χωρική Πυκνότητα Φορτίου

$$\rho = \frac{Q}{V}$$

όπου:

ρ : χωρική (ογκομετρική) πυκνότητα φορτίου (μονάδα: C/m³)

Q : συνολικό φορτίο (C)

V : όγκος κατανομής (m³)

Σχέση με στοιχειώδες φορτίο:

$$dq = \rho dV$$

Άσκηση 5

Μία σφαίρα ακτίνας 4cm έχει καθαρό φορτίο +39μC. (α) Αν το φορτίο είναι ομοιόμορφα κατανεμημένο σε ολόκληρο τον όγκο της σφαίρας, ποια είναι η χωρική πυκνότητα φορτίου; (β) Αν αυτό το φορτίο είναι ομοιόμορφα κατανεμημένο στην επιφάνεια της σφαίρας, ποια είναι η επιφανειακή πυκνότητα φορτίου;

Λύση

$$R = 4 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

$$Q = 39 \cdot 10^{-6} \text{ C}$$



$$\begin{aligned} \alpha) \quad \rho &= \frac{Q}{V} & , \quad V &= \frac{4}{3} \pi R^3 \\ \rho &= \frac{39 \cdot 10^{-6}}{2,68 \cdot 10^{-4}} & , \quad V &= \frac{4}{3} \pi (4 \cdot 10^{-2})^3 \\ & & , \quad V &= 2,68 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3 \end{aligned}$$

$$\rho = 0,146 \text{ C/m}^3$$

$$\begin{aligned} \beta) \quad \sigma &= \frac{Q}{A} & , \quad A &= 4 \pi R^2 \\ \sigma &= \frac{39 \cdot 10^{-6}}{0,0201} & , \quad A &= 4 \pi (4 \cdot 10^{-2})^2 \\ & & , \quad A &\approx 0,0201 \text{ m}^2 \\ \sigma &= 1,94 \cdot 10^{-3} \text{ C/m}^2 \end{aligned}$$

Νόμος του Gauss

Είναι μία από τις θεμελιώδεις εξισώσεις της ηλεκτροστατικής και αποτελεί ειδική περίπτωση του νόμου του Coulomb σε διαφορική μορφή. Διατυπώνει τη σχέση ανάμεσα στο ηλεκτρικό πεδίο και το ηλεκτρικό φορτίο που το δημιουργεί.

$$\oint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{\text{εντός}}}{\epsilon_0}$$



Επεξήγηση όρων

- $\oint_{\Sigma}$: επιφανειακό ολοκλήρωμα σε κλειστή επιφάνεια
- $\vec{E}$: διανυσματική ένταση ηλεκτρικού πεδίου [N/C] ή [V/m]
- $d\vec{A}$: στοιχειώδες διανυσματικό διάνυσμα επιφάνειας, μέτρο = εμβαδόν στοιχειώδους επιφάνειας dA , διεύθυνση = κάθετη στην επιφάνεια
- $\vec{E} \cdot d\vec{A}$: στοιχειώδης ροή ηλεκτρικού πεδίου μέσα από το επιφανειακό στοιχείο
- $Q_{\text{εντός}}$: συνολικό ηλεκτρικό φορτίο που περικλείεται από την επιφάνεια
- ϵ_0 : διηλεκτρική σταθερά του κενού,

$$\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{N} \cdot \text{m}^2$$



Ροή Ηλεκτρικού Πεδίου

Η ροή του ηλεκτρικού πεδίου ορίζεται ως:

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

- Μετράει πόσο "περνάει" το ηλεκτρικό πεδίο μέσα από μία επιφάνεια.
- Μονάδες: $[N/C] \cdot [m^2]$

Εφαρμογές του Νόμου του Gauss

Ο νόμος του Gauss είναι ιδιαίτερα χρήσιμος σε καταστάσεις συμμετρίας, όπου διευκολύνει τον υπολογισμό του ηλεκτρικού πεδίου:

- Σφαιρική συμμετρία (π.χ. φορτισμένη σφαίρα)
- Κυλινδρική συμμετρία (π.χ. γραμμικό φορτίο, φορτισμένος κύλινδρος)
- Επίπεδη συμμετρία (π.χ. άπειρο φορτισμένο επίπεδο)

Άσκηση 1

Μία συμπαγής σφαίρα ακτίνας 40 cm έχει ολικό θετικό φορτίο 26 μC , ομοιόμορφα κατανεμημένο σε ολόκληρο τον όγκο της. Υπολογίστε την ένταση του ηλεκτρικού πεδίου στις παρακάτω αποστάσεις από το κέντρο της σφαίρας: (α) 0 cm, (β) 10 cm, (γ) 40 cm και (δ) 60 cm.

Λύση

$$R = 40 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

$$Q = 26 \cdot 10^{-6} \text{ C}$$

$$\oint \vec{E} d\vec{A} = \frac{Q_{\text{ΕΙΝΤΟΣ}}}{\epsilon_0}$$



$$\Rightarrow E \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q_{\text{ΕΙΝΤΟΣ}}}{\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_{\text{ΕΙΝΤΟΣ}}}{r^2}$$

Πυκνότητα όγκου : $\rho = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3}$

• $r < R$

$$Q_{\text{ΕΙΝΤΟΣ}} = \rho \cdot \frac{4}{3} \pi r^3$$

$$Q_{\text{ΕΙΝΤΟΣ}} = \frac{Q}{\frac{4}{3} \pi R^3} \cdot \frac{4}{3} \pi r^3$$

$$Q_{\text{ΕΙΝΤΟΣ}} = Q \frac{r^3}{R^3}$$

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_{\text{ΕΙΝΤΟΣ}}}{r^2}$$

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{Q \frac{r^3}{R^3}}{\frac{r^2}{1}} \right]$$

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} Q \frac{r^3}{\cancel{r^2} R^3}$$

$$E(r) = k \frac{Q}{R^3} r$$



Σημειώσεις - Λυμένα Θέματα

e-students.gr

☎ 698 93 94 741



Σημειώσεις - Λυμένα Θέματα

e-students.gr

☎ 698 93 94 741

- $r \geq R$

$$Q_{\text{ΕΙΝΤΟΣ}} = Q$$



Σημειώσεις - Λυμένα Θέματα

e-students.gr

☎ 698 93 94 741

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_{\text{ΕΙΝΤΟΣ}}}{r^2}$$

$$\Rightarrow E(r) = k \frac{Q}{r^2}$$

για $r=0\text{m}$ (ΚΕΝΤΡΟ) ($r < R$)

$$E(r=0) = 0$$



Σημειώσεις - Λυμένα Θέματα

e-students.gr

☎ 698 93 94 741

για $r=0,10\text{m}$ ($r < R$)

$$E(r) = k \frac{Q}{R^3} r = \frac{8,9875 \cdot 10^9 \cdot 26 \cdot 10^{-6} \cdot 0,10}{(0,40)^3}$$

$$E(r) \approx 3,65 \cdot 10^5 \text{ N/C}$$

για $r=0,4$ (ΕΠΙΦΑΝΕΙΑ, $r=R$)

$$E(R) = k \frac{Q}{R^2} = \frac{8,9875 \cdot 10^9 \cdot 26 \cdot 10^{-6}}{(0,40)^2}$$

$$E(R) = 1,46 \cdot 10^6 \text{ N/C}$$

δ) $r = 0,60 \text{ m}$ (Εξωτερικό, $r > R$)

$$E(r) = k \frac{Q}{r^2} = \frac{8,9875 \cdot 10^9 \cdot 26 \cdot 10^{-6}}{(0,60)^2}$$



Σημειώσεις - Λογμένα Θέματα

e-students.gr

☎ 698 93 94 741

Άσκηση 2

Θεωρείστε έναν λεπτό σφαιρικό φλοιό ακτίνας 14 cm με καθαρό φορτίο 32 μC κατανεμημένο ομοιόμορφα πάνω στην επιφάνειά του. Βρείτε το ηλεκτρικό πεδίο στις παρακάτω αποστάσεις από το κέντρο της κατανομής του φορτίου: (α) $r=10\text{ cm}$ και (β) $r=20\text{ cm}$.

Λύση

Για σημεία ΕΙΝΤΟΣ του φλοιού (δηλαδή $r < R$): το περιυλειόμενο φορτίο μέσα σε μια Γαουσιανή σφαίρα ακτίνας r είναι μηδέν (όλα τα φορτία είναι στην επιφάνεια)

$$\oint \vec{E} d\vec{A} = \frac{Q_{\text{ΕΙΝΤΟΣ}}}{\epsilon_0} = 0$$

$$E(r) = 0 \quad \text{για } r < R$$

Για σημεία ΕΙΝΤΟΣ από το φλοιό (δηλαδή $r > R$): η Γαουσιανή σφαίρα περιυλείει όλο το φορτίο Q , οπότε το πεδίο είναι ίδιο με το πεδίο ενός σημειακού φορτίου Q

$$E(r) = k \frac{Q}{r^2}$$

$$R = 14 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

$$Q = 3,2 \cdot 10^{-5} \text{ C}$$

$$\text{για } r = 10 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

$$E = 0 \text{ N/C}$$

$$\text{για } r = 20 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

$$E(r) = k \frac{Q}{r^2}$$

$$E = 7,19 \cdot 10^6 \text{ N/C}$$

Ηλεκτρικό Δυναμικό

Το ηλεκτρικό δυναμικό σε ένα σημείο του ηλεκτρικού πεδίου ορίζεται ως:

Το έργο που χρειάζεται για να μεταφερθεί μοναδιαίο θετικό φορτίο από το άπειρο στο συγκεκριμένο σημείο, ενάντια στις δυνάμεις του ηλεκτρικού πεδίου.

Δηλαδή, το ηλεκτρικό δυναμικό V στο σημείο P είναι το έργο ανά μονάδα φορτίου:

$$V = \frac{W}{q} \quad \left(\frac{J}{C} = \text{Volt} \right)$$

όπου:

- W : έργο που κάνει εξωτερική δύναμη κατά τη μεταφορά φορτίου q από το άπειρο στο σημείο P .
- q : το δοκιμαστικό θετικό φορτίο.

Μαθηματική Σχέση με το Ηλεκτρικό Πεδίο

Το ηλεκτρικό δυναμικό συνδέεται με το ηλεκτρικό πεδίο μέσω της γραμμικής ολοκλήρωσης:



Σημειώσεις - Λογμένα Θέματα
e-students.gr
☎ 698 93 94 741

$$\Delta V = V_B - V_A = - \int_A^B \vec{E} d\vec{S}$$

Δηλαδή, η διαφορά δυναμικού μεταξύ δύο σημείων A και B ισούται με το αρνητικό ολοκλήρωμα της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου κατά μήκος της διαδρομής.

Σχέση με το Έργο

Η διαφορά δυναμικού ΔV εκφράζει το έργο ανά μονάδα φορτίου:

$$W_{A \rightarrow B} = q(V_A - V_B)$$

όπου $W_{A \rightarrow B}$ είναι το έργο που εκτελείται κατά τη μετακίνηση του φορτίου q από το σημείο A στο B.

Δυναμικό από Σημειακό Φορτίο

Για ένα σημειακό φορτίο Q , το δυναμικό σε απόσταση r από αυτό δίνεται από:

$$V(r) = k \frac{Q}{r}$$



Αρχή της επαλληλίας

Αν υπάρχουν πολλά φορτία, το συνολικό δυναμικό είναι το άθροισμα των δυναμικών από κάθε φορτίο (αρχή της επαλληλίας):

$$V_{ολ} = \sum_i V_i = k \sum_i \frac{Q_i}{r_i}$$

Σχέση με το Ηλεκτρικό Πεδίο (διαφορική μορφή)

Το ηλεκτρικό πεδίο είναι το αρνητικό χωρικό παράγωγο του δυναμικού:

$$\vec{E} = -\nabla V$$



Άσκηση 1

Θεωρείστε ότι ένας δακτύλιος έχει ακτίνα R , με ολικό φορτίο Q κατανεμημένο ομοιόμορφα κατά μήκος της περιφέρειάς του. Ποια είναι η διαφορά δυναμικού μεταξύ του κέντρου του δακτυλίου και ενός σημείου πάνω στον άξονα του δακτυλίου που απέχει από το κέντρο του κατά $2R$;

Λύση

$$dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

$$\frac{dq}{r}$$



Σημειώσεις • Λυμένα θέματα

e-students.gr

☎ 698 93 94 741

Κάθε στοιχειώδες φορτίο dq στην
περιφέρεια απέχει από το P

$$r = \sqrt{R^2 + z^2}$$

$$dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{\sqrt{R^2 + z^2}}$$

$$\int dV = \int \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{\sqrt{R^2 + z^2}}$$

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{R^2 + z^2}} \int dq$$

Το $\int dq$ πάνω σε όλο τον δακτύλιο
είναι το συνολικό φορτίο Q

$$V(z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{\sqrt{R^2 + z^2}}$$

για $z=0$ (κέντρο)

$$V(0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R}$$

για $z=2R$

$$V(2R) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{\sqrt{5} R}$$

$$\Delta V = V(0) - V(2R) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{5}} \right)$$