

Φυσική



Κυματική

Κύματα

Ένα κύμα είναι μια διαταραχή που μεταφέρει ενέργεια μέσω ύλης ή χώρου, με ελάχιστη ή καθόλου μεταφορά μάζας.

Τύποι κυμάτων:

Μηχανικά κύματα → απαιτούν μέσο (π.χ. ήχος, κύματα σε χορδή).

Ηλεκτρομαγνητικά κύματα → δεν απαιτούν μέσο (π.χ. φως, ραδιοκύματα).

Μεγέθη – Μονάδες:

Πλάτος $A \rightarrow [m]$

Μήκος κύματος $\lambda \rightarrow [m]$

Συχνότητα $f \rightarrow [Hz]$

Περίοδος $T=1/f \rightarrow [s]$

Κυκλική συχνότητα $\omega=2\pi f \rightarrow [rad/s]$

Κυματάριθμος $k=2\pi/\lambda \rightarrow [rad/m]$

Ταχύτητα διάδοσης $v=\lambda f \rightarrow [m/s]$

Κυματική Εξίσωση

Η μονοδιάστατη κυματική εξίσωση είναι:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$$

Περιγράφει την κίνηση ενός κύματος που διαδίδεται σε μέσο με ταχύτητα v .

Αρμονικά Κύματα

Αν το κύμα είναι ημιτονοειδές:

$$y(x,t) = A \sin(kx - \omega t + \phi)$$



Άσκηση 1

Ένα εγκάρσιο αρμονικό (ημιτονοειδές) κύμα, που ταξιδεύει σε μία τεντωμένη χορδή κατά τη θετική x διεύθυνση, έχει κυματάριθμο 3 m^{-1} και γωνιακή συχνότητα 20 rad/s . Εάν το πλάτος του είναι 0.2 m και το κύμα παρουσιάζει μέγιστη απομάκρυνση για $x=0$, $t=0$, να βρεθεί η κυματική συνάρτηση.

Λύση

$$y(x,t) = A \sin(kx - \omega t + \phi)$$

$$\text{για } x=0, t=0, y(0,0) = A$$

$$A = A \sin(\phi) \Rightarrow \sin \phi = 1 \Rightarrow \phi = \frac{\pi}{2}$$

$$y(x,t) = 0,2 \sin\left(3x - 20t + \frac{\pi}{2}\right)$$

Άσκηση 2

Ένα εγκάρσιο αρμονικό (ημιτονοειδές) κύμα ταξιδεύει σε μία τεντωμένη χορδή κατά τη θετική x διεύθυνση με ταχύτητα 10 cm/s . Το πλάτος του κύματος είναι 10 cm και το μήκος κύματος του είναι 0.5 m . Βρείτε την εγκάρσια ταχύτητα ενός σημείου P της χορδής όπου η μετατόπιση του κύματος είναι 5 cm .

Λύση

$$\bullet k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{0,5} = 4\pi \text{ m}^{-1} \Rightarrow k = 4\pi \text{ m}^{-1}$$

$$\bullet v = f \cdot \lambda = \frac{\omega}{2\pi} \cdot \frac{2\pi}{k} = \frac{\omega}{k}$$

$$\Rightarrow v = \frac{\omega}{k} \Rightarrow \omega = v \cdot k$$

$$\Rightarrow \omega = 10 \cdot 10^{-2} \cdot 4\pi$$

$$\Rightarrow \omega = 0,4\pi \text{ rad/sec}$$



Σημειώσεις - Λυμένα θέματα

e-students.gr

☎ 698 93 94 741

$$y(x,t) = A \sin(kx - \omega t + \phi)$$

$$5 = 10 \sin(kx - \omega t + \phi)$$

$$\Rightarrow \sin(kx - \omega t + \phi) = \frac{1}{2}$$

$$kx - \omega t + \phi = \frac{\pi}{6} \quad \text{ή} \quad kx - \omega t + \phi = \frac{5\pi}{6}$$

$$L(x,t) = \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial (A \sin(kx - \omega t + \phi))}{\partial t}$$

Σημειώσεις - Λυμένα Θέματα

e-students.gr

© 698 93 94 741

$$L(x,t) = A \cos(kx - \omega t + \phi) \cdot \frac{\partial (kx - \omega t + \phi)}{\partial t}$$

$$L(x,t) = -\omega A \cos(kx - \omega t + \phi)$$

$$A = 0.1 \text{ m}$$

$$\Rightarrow \omega = 0.4 \pi \text{ rad/s}$$

$$L(x,t) = -0.04\pi \cos(kx - \omega t + \phi)$$

$$\text{για } kx - \omega t + \phi = \frac{\pi}{6}$$

$$L = -0.02\sqrt{3}\pi \text{ m/s}$$

$$\text{για } kx - \omega t + \phi = \frac{5\pi}{6}$$

$$L = 0.02\sqrt{3}\pi \text{ m/s}$$

Στάσιμα Κύματα

Αν δυο όμοια αρμονικά οδεύοντα κύματα (ίδιο A, k, ω) κινούνται σε αντίθετες κατευθύνσεις,

$$y_1(x, t) = A \sin(kx - \omega t)$$

$$y_2(x, t) = A \sin(kx + \omega t)$$

τότε η υπέρθεσή τους δίνει στάσιμο κύμα

$$y(x, t) = 2A \sin(kx) \cos(\omega t)$$

(Μπορεί επίσης να προκύψει άλλη μορφή με $\cos(kx) \sin(\omega t)$ ανάλογα με φάσεις, αλλά η θεμελιώδης μορφή είναι αυτή.)

κυματάριθος: $k = 2\pi/\lambda$

γωνιακή συχνότητα: $\omega = 2\pi f$

ταχύτητα κύματος: $v = \lambda f$

μέγιστο πλάτος στάσιμου κύματος είναι $2A$ (όπου A είναι το πλάτος κάθε αρχικού οδεύοντος κύματος).

Δεσμοί και κοιλίες

Δεσμοί: σημεία όπου $\sin(kx) = 0 \Rightarrow kx = n\pi \Rightarrow x = \frac{n\pi}{k}$

Η απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών δεσμών είναι $\Delta x = \frac{\pi}{k} = \frac{\lambda}{2}$

Κοιλίες: σημεία όπου $|\sin(kx)| = 1 \Rightarrow kx = \frac{\pi}{2} + n\pi \Rightarrow x = \frac{(2n+1)\pi}{2k}$

Η απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών κοιλιών είναι: $\Delta x = \frac{\pi}{k} = \frac{\lambda}{2}$

Εγκάρσια ταχύτητα

Η εγκάρσια (στιγμιαία) ταχύτητα κάθε σημείου της χορδής είναι η χρονική παράγωγος της μετατόπισης:

$$U(x, t) = \frac{\partial y}{\partial t}$$



Σημειώσεις • Λυμένα θέματα

e-students.gr

☎ 698 93 94 741

Άσκηση 3

Ένα στάσιμο κύμα είναι της μορφής

$$y(x,t) = \frac{1}{2} \sin\left(\frac{\pi x}{3}\right) \cos(40\pi t)$$

όπου τα y, x εκφράζονται σε mm και το t σε s. Το κύμα αυτό έχει δημιουργηθεί από δύο οδεύοντα κύματα με ίδιο πλάτος, συχνότητα και μήκος κύματος, που κινούνται σε αντίθετες κατευθύνσεις.

- I. Να βρεθούν το πλάτος, η συχνότητα, το μήκος κύματος και η ταχύτητα των αρχικών κυμάτων που δημιούργησαν το στάσιμο κύμα και να γραφεί η κυματική μορφή τους.
- II. Ποια είναι η απόσταση μεταξύ των δεσμών (nodes) του στάσιμου κύματος;
- III. Ποια η εγκάρσια ταχύτητα του στάσιμου κύματος για $x=1.5$ mm και $t=98$ s;

Λύση

$$\text{I)} 2A = \frac{1}{2} \Rightarrow A = \frac{1}{4} \text{ mm} = 2.5 \cdot 10^{-4} \text{ m}$$

$$k = \frac{\pi}{3} \text{ mm}^{-1}$$

$$\omega = 40\pi \text{ r/s}$$

$$\omega = 2\pi f \Rightarrow f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{40\pi}{2\pi} = 20 \text{ Hz}$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{3}} = 6 \text{ mm} = 6 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

$$v = \lambda \cdot f = 6 \cdot 10^{-3} \cdot 20 = 0.120 \text{ m/sec}$$

$$y_1(x,t) = A \sin(kx - \omega t) = \frac{1}{4} \sin\left(\frac{\pi}{3}x - 40\pi t\right) \text{ mm}$$

$$y_2(x,t) = A \sin(kx + \omega t) = \frac{1}{4} \sin\left(\frac{\pi}{3}x + 40\pi t\right) \text{ mm}$$



$$\text{ii) } \sin(kx) = 0$$

$$kx = n\pi \Rightarrow x = \frac{n\pi}{k} = \frac{n\pi}{\pi/3} = 3n \text{ mm}$$

$$x = 0, 3\text{mm}, 6\text{mm}, \dots$$

$$\Delta x = \frac{\lambda}{2} = \frac{6}{2} = 3\text{mm}$$



$$\text{iii) } U(x,t) = \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial \left(\frac{1}{2} \sin\left(\frac{\pi x}{3}\right) \cos(40\pi t) \right)}{\partial t}$$

$$= \frac{1}{2} \sin\left(\frac{\pi x}{3}\right) \frac{\partial}{\partial t} \cos(40\pi t)$$

$$\Rightarrow U(x,t) = -\frac{1}{2} 40\pi \sin\left(\frac{\pi x}{3}\right) \sin(40\pi t)$$

$$\Rightarrow U(x,t) = -20\pi \sin\left(\frac{\pi x}{3}\right) \sin(40\pi t)$$

• $\sin\left(\frac{\pi x}{3}\right)$ στο $x = 1.5\text{mm}$

$$\frac{\pi x}{3} = \frac{\pi \cdot 1.5}{3} = \frac{\pi}{2}, \quad \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

• $\sin(40\pi t)$ για $t = \frac{9}{8}\text{sec}$
 $\sin(45\pi) = 0$

$$U(1.5\text{mm}, 9/8\text{sec}) = 0\text{mm/sec}$$

Στάσιμα Κύματα σε Χορδή

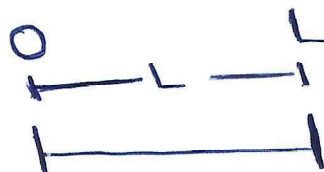
Κυματική εξίσωση σε χορδή

Για ένα ελαστικό νήμα (χορδή) μήκους L , με τάση T και γραμμική πυκνότητα μ , η κυματική εξίσωση είναι:

με:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$$

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$



όπου:

T : τάση του νήματος (μονάδα: N)

μ : γραμμική πυκνότητα (kg/m)

v : ταχύτητα κύματος (m/s)



Συνοριακές συνθήκες

Αν η χορδή είναι πακτωμένη σε ένα άκρο: η απομάκρυνση εκεί είναι μηδέν.

Αν είναι ελεύθερη σε ένα άκρο: η παράγωγος (κλίση) είναι μηδέν.

Στάσιμα κύματα σε χορδή με δύο πακτωμένα άκρα

Η γενική μορφή της λύσης είναι:

Μήκη κύματος:

$$y(x,t) = A \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \cos(\omega t)$$
$$\text{ή } y(x,t) = A \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \sin(\omega t)$$

$$\lambda_n = 2L/n$$

Συχνότητες (ιδιοσυχνότητες):

$$f_n = nv/2L, n=1,2,3,\dots$$

Βασική συχνότητα (1η αρμονική):

$$f_1 = v/2L$$