

Κίνηση στο χώρο

Διάνυσμα θέσης

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$



Εμπειρογίσις - Λογμένα Σέματα

e-students.gr

© 698 93 94 741

με μέτρο $|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Στιγμιαία ταχύτητα

$$\begin{aligned}\vec{v} &= \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k} \\ &= v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}\end{aligned}$$

με μέτρο : $|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$



Εμπειρογίσις - Λογμένα Σέματα

e-students.gr

© 698 93 94 741

Στιγμιαία επιτάχυνση

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt}\vec{i} + \frac{dv_y}{dt}\vec{j} + \frac{dv_z}{dt}\vec{k} \\ &= a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}\end{aligned}$$

με μέτρο : $|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$

$$\bullet \quad v = \frac{dx}{dt} \Rightarrow dx = v \cdot dt \Rightarrow \int_{x_0}^x dx = \int_0^t v dt$$

$$\Rightarrow x - x_0 = v(t - 0) \Rightarrow \boxed{x = x_0 + vt}$$

$$\bullet \quad a = \frac{dv}{dt} \Rightarrow dv = a dt \Rightarrow \int_{v_0}^v dv = \int_0^t a dt$$

$$\Rightarrow v - v_0 = a(t - 0) \Rightarrow \boxed{v = v_0 + at}$$



Εμπειρίες - Απρόβλεπτα

e-students.gr

© 698 93 94 744

$r \rightarrow v \rightarrow a$ (ηλεκτρομαγνητισμός)

$a \rightarrow v \rightarrow r$ (οδοντομετρική)

1^{ος} Ν. Newton: ΟΛΙΓΗΤΟ ή v σταθ $\Sigma \vec{F} = 0$

2^{ος} Ν. Newton: $\Sigma \vec{F} = m \cdot \vec{a}$

3^{ος} Ν. Newton: $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$

• Κινητική Ενέργεια $E = \frac{1}{2} m v^2 (J)$



Εμπειρίες - Απρόβλεπτα

e-students.gr

© 698 93 94 744

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

Σωματίδιο χημωτής μάζας m κινείται στο χώρο με διάνυσμα θέσης :

$$\vec{r}(t) = ((t+1)^2/2)\vec{i} + (-9+6t)\vec{j} - 12t\vec{k}$$

Οι αρατάσεις είναι σε μέτρα και ο χρόνος σε δευτερόλεπτα. Υπλοχίστε α) την συνολική δύναμη (μέτρο και διεύθυνση) που ασκείται το σωματίδιο β) την χημια που σχηματίζεται η ταχύτητα και η επιτάχυνση την χρονική στιγμή $t=1\text{sec}$ γ) την αρατάση (σε μέτρα) του σωματιδίου την χρονική στιγμή $t=3\text{sec}$ απ' ένα άλλο που βρίσκεται ακριβώς στη θέση $\vec{r} = (-12\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k})\text{m}$

Λύση



$$a) \vec{r}(t) = ((t+1)^2/2)\vec{i} + (-9+6t)\vec{j} - 12t\vec{k} \text{ (m)}$$

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = (t+1)\vec{i} + 6\vec{j} \text{ (m/sec)}$$

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{i} + 0\vec{j} - 0\vec{k} \text{ (m/s}^2\text{)}$$

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} = m\vec{i} \text{ (N)}$$

$$b) \vec{U}(t) = (t+1)\vec{i} + 6\vec{j} \text{ (m/sec)}$$

$$\vec{U}(t=1\text{sec}) = 2\vec{i} + 6\vec{j} \text{ (m/sec)}$$

$$\vec{a}(t) = \vec{i} \text{ (m/sec}^2\text{)}$$

$$\vec{a}(t=1\text{sec}) = \vec{i} \text{ (m/sec}^2\text{)}$$



Σημειώσεις · Ασκήσεις Θέματα

e-students.gr

☎ 698 93 94 741

$$\vec{v} \cdot \vec{a} = |\vec{v}| \cdot |\vec{a}| \cos \theta \Rightarrow \cos \theta = \frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{|\vec{v}| \cdot |\vec{a}|}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{2^2 + 6^2} = \sqrt{4 + 36} = \sqrt{40}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{1} = 1$$

$$\cos \theta = \frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{|\vec{v}| |\vec{a}|} = \frac{(2, 6, 0) \cdot (1, 0, 0)}{\sqrt{40} \cdot \sqrt{1}}$$

$$= \frac{2 \cdot 1 + 6 \cdot 0 + 0 \cdot 0}{\sqrt{40}} = \frac{2}{\sqrt{40}} = 0,3162$$

$$\theta = \cos^{-1}(0,3162) = 71,567^\circ$$



Σημειώσεις · Ασκήσεις Θέματα

e-students.gr

☎ 698 93 94 741

$$\gamma) \vec{r}_1(t) = ((t+1)^2/2) \vec{i} + (-9+6t) \vec{j} - 12t \vec{k}$$

$$\vec{r}_1(t=3\text{sec}) = ((3+1)^2/2) \vec{i} + (-9+6 \cdot 3) \vec{j} - 12 \vec{k}$$

$$\vec{r}_1(t=3\text{sec}) = 8 \vec{i} + 9 \vec{j} - 12 \vec{k}$$

$$\vec{r}_2 - \vec{r}_1 = -20 \vec{i} - 11 \vec{j} + 15 \vec{k}$$

$$S = |\vec{r}_2 - \vec{r}_1| = \sqrt{20^2 + 11^2 + 15^2} = \sqrt{746} \text{ m}$$



Επικοινωνία - Αιτήματα Σημάτων

e-students.gr

☎ 698 93 94 741



Επικοινωνία - Αιτήματα Σημάτων

e-students.gr

☎ 698 93 94 741

● Εφαρμογή

Σώμα μάζας m που τη χρονική στιγμή $t=0$ βρίσκεται στη θέση $\vec{r}_0 = R\vec{i}$ και έχει αρχική ταχύτητα $\vec{v}_0 = \omega R\vec{j}$ αρχίζει να κινείται υπό την επίδραση της δύναμης $\vec{F} = -mR\omega^2(\cos\omega t\vec{i} + \sin\omega t\vec{j})$.
Υπολογίστε την τροχιά $\vec{r}(t)$.

Λύση



Σημειώσεις - Λυμένα θέματα

e-students.gr

© 698 93 94 741

$$\vec{F} = -mR\omega^2(\cos\omega t\vec{i} + \sin\omega t\vec{j})$$

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} \Rightarrow \vec{a} = -R\omega^2(\cos\omega t\vec{i} + \sin\omega t\vec{j})$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a} dt$$

$$\Rightarrow \int_{\vec{v}_0 = \omega R\vec{j}}^{\vec{v}} d\vec{v} = \int_0^t -R\omega^2(\cos\omega t\vec{i} + \sin\omega t\vec{j}) dt$$

$$\vec{v} - (\omega R\vec{j}) = -R\omega(\sin\omega t\vec{i} + (1 - \cos\omega t)\vec{j})$$

$$\vec{v}(t) = -R\omega\vec{j} - R\omega(\sin\omega t\vec{i} + (1 - \cos\omega t)\vec{j})$$

$$\vec{v}(t) = -R\omega(\sin\omega t\vec{i} - \cos\omega t\vec{j})$$



Σημειώσεις - Λυμένα θέματα

e-students.gr

© 698 93 94 741

$$v = \frac{dr}{dt} \Rightarrow dr = v dt$$



Σημειώσεις - Λυμένα Θέματα

e-students.gr

© 698 93 94 741

$$\int_{Ri+0j}^r dr = \int_0^t -R\omega (\sin\omega t \vec{i} - \cos\omega t \vec{j})$$

$$r - Ri = R(\cos\omega t - 1)\vec{i} + \sin\omega t \vec{j}$$

$$\vec{r}(t) = R(\cos\omega t \vec{i} + \sin\omega t \vec{j})$$



Σημειώσεις - Λυμένα Θέματα

e-students.gr

© 698 93 94 741