

Φυσική



Κινηματική στο Χώρο (3 Διαστάσεις)

Η κίνηση ενός σώματος περιγράφεται πλήρως μέσω των διανυσματικών μεγεθών της θέσης, της ταχύτητας και της επιτάχυνσης.

Διάνυσμα Θέσης (r)

Προσδιορίζει τη θέση του σώματος σε ένα τρισδιάστατο σύστημα συντεταγμένων (x, y, z)

$$r = xi + yj + zk$$

- **Μέτρο (Απόσταση από την αρχή):** $|r| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Συμβολισμοί

r: Το διάνυσμα θέσης (ξεκινά από το (0,0,0) και δείχνει το σώμα).

x, y, z: Οι συντεταγμένες του σώματος στους τρεις άξονες.

i ,j ,k: Τα **μοναδιαία διανύσματα**. Δείχνουν την κατεύθυνση των αξόνων x, y, z αντίστοιχα και έχουν μέτρο 1.

|r|: Το μέτρο (μήκος) του διανύσματος, δηλαδή η ευθύγραμμη απόσταση από την αρχή των αξόνων.

Στιγμιαία Ταχύτητα (u)

Ορίζεται ως ο ρυθμός μεταβολής του διανύσματος θέσης ως προς το χρόνο (παράγωγος).

$$u = \frac{dr}{dt} = u_x i + u_y j + u_z k$$

- **Συνιστώσες:** $u_x = \frac{dx}{dt}, u_y = \frac{dy}{dt}, u_z = \frac{dz}{dt}$
- **Μέτρο:** $|u| = \sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2}$

Συμβολισμοί

dt: Μια απειροελάχιστα μικρή χρονική στιγμή (μεταβολή χρόνου).

dr: Η πολύ μικρή μετατόπιση που έγινε στο χρόνο dt.

u_x, u_y, u_z : Οι ταχύτητες με τις οποίες κινείται το σώμα "παράλληλα" σε κάθε άξονα.

Στιγμιαία Επιτάχυνση (a)

Ορίζεται ως ο ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας ως προς το χρόνο.

$$a = \frac{du}{dt} = a_x i + a_y j + a_z k$$

- **Συνιστώσες:** $a_x = \frac{du_x}{dt}, a_y = \frac{du_y}{dt}, a_z = \frac{du_z}{dt}$
- **Μέτρο:** $|a| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$

a: Δείχνει πόσο γρήγορα αυξάνεται ή μειώνεται η ταχύτητα.



● Σχέσεις Παραγώγων και Ολοκληρωμάτων

- $r \rightarrow u \rightarrow a$ (παραγωγίζω)
- $a \rightarrow u \rightarrow r$ (ολοκληρώνω)

Στη φυσική, για να μεταβούμε από ένα μέγεθος σε άλλο, χρησιμοποιούμε τον απειροστικό λογισμό:

- **Παραγωγή ($\frac{d}{dt}$):** Χρησιμοποιείται όταν πηγαίνουμε από τη **Θέση** $\rightarrow$ **Ταχύτητα** $\rightarrow$ **Επιτάχυνση**.
- **Ολοκλήρωση ($\int$):** Χρησιμοποιείται για την αντίστροφη πορεία: **Επιτάχυνση** $\rightarrow$ **Ταχύτητα** $\rightarrow$ **Θέση**.

Ολοκληρώματα & Νόμοι

- $u = \frac{dx}{dt} \Rightarrow dx = u \cdot dt \Rightarrow \int_{x_0}^x dx = \int_0^t u dt \Rightarrow x - x_0 = u(t - 0) \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{u}t$
- $a = \frac{du}{dt} \Rightarrow du = a \cdot dt \Rightarrow \int_{u_0}^u du = \int_0^t a dt \Rightarrow u - u_0 = a(t - 0) \Rightarrow \mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \mathbf{a}t$

Δυναμική & Νόμοι του Νεύτωνα

1ος Νόμος (Αδράνεια): Αν η συνισταμένη των δυνάμεων είναι μηδέν ($\Sigma F = 0$), το σώμα παραμένει ακίνητο ή κινείται με σταθερή ταχύτητα (Ε.Ο.Κ.).

2ος Νόμος (Θεμελιώδης): Η συνισταμένη δύναμη ισούται με το γινόμενο της μάζας επί την επιτάχυνση: $\Sigma F = ma$.

3ος Νόμος (Δράση-Αντίδραση): Για κάθε δύναμη δράσης F_{12} υπάρχει μια αντίθετη δύναμη αντίδρασης F_{21} , $F_{12} = -F_{21}$.

Η Ενέργεια στη Μηχανική

1. Κινητική Ενέργεια (K ή T)

Ορισμός: Είναι η ενέργεια που κατέχει ένα σώμα λόγω της κίνησής του

- **Τύπος:** $K = \frac{1}{2}mu^2$
- **Μονάδα μέτρησης:** Joule (J) στο S.I.
- **Συμβολισμοί:**
 - m : Η μάζα του σώματος (kg).
 - u : Το μέτρο της ταχύτητας (m/s).

2. Δυναμική Ενέργεια (U ή V)

Ορισμός: Είναι η ενέργεια που έχει ένα σώμα λόγω της θέσης του σε ένα πεδίο δυνάμεων (π.χ. βαρυτικό).

- **Τύπος (Βαρυτική):** $U = mgh$
- **Συμβολισμοί:**
 - g : Η επιτάχυνση της βαρύτητας ($\approx 9,8 \text{ m/s}^2$).
 - h : Το ύψος από ένα επίπεδο αναφοράς.

3. Μηχανική Ενέργεια ($E_{μηχ}$)

Ορισμός: Το άθροισμα της κινητικής και της δυναμικής ενέργειας ενός σώματος.

- **Τύπος:** $E_{μηχ} = K + U$
- **Αρχή Διατήρησης:** Αν ασκούνται μόνο συντηρητικές δυνάμεις (π.χ. βάρος), τότε η $E_{μηχ}$ παραμένει σταθερή ($E_{αρχ} = E_{τελ}$).

Άσκηση

Σωματίδιο γνωστής μάζας m κινείται στο χώρο με διάνυσμα θέσης:

$$r(t) = \frac{(t+1)^2}{2}i + (-9+6t)j - 12k \text{ (m)}$$

Οι αποστάσεις είναι σε μέτρα και ο χρόνος σε δευτερόλεπτα. Υπολογίστε: **α)** Την συνολική δύναμη (μέτρο και διεύθυνση) που ασκείται στο σωματίδιο. **β)** Τη γωνία που σχηματίζουν η ταχύτητα και η επιτάχυνση την χρονική στιγμή $t = 1\text{sec}$. **γ)** Την απόσταση (σε μέτρα) του σωματιδίου την χρονική στιγμή $t = 3\text{sec}$ από ένα άλλο σώμα που βρίσκεται ακίνητο στη θέση $r_2 = (-12i - 2j + 3k)\text{m}$.

Λύση

$$\alpha) r(t) = \frac{(t+1)^2}{2}\hat{i} + (-9+6t)\hat{j} - 12\hat{k} \text{ (m)}$$

$$v(t) = \frac{dr}{dt} = (t+1)\hat{i} + 6\hat{j} \text{ (m/sec)}$$

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = 1\hat{i} + 0\hat{j} - 0\hat{k} \text{ (m/s}^2\text{)}$$

$$F = m \cdot a = m\hat{i} \text{ (N)}$$

$$\beta) v(t) = (t+1)\hat{i} + 6\hat{j} \text{ (m/sec)} \quad v(t = 1\text{sec}) = 2\hat{i} + 6\hat{j} \text{ (m/sec)}$$

$$a(t) = \hat{i} \text{ (m/s}^2\text{)} \quad a(t = 1\text{sec}) = \hat{i} \text{ (m/s}^2\text{)}$$

$$v \cdot a = |v| \cdot |a| \cos \theta \Rightarrow \cos \theta = \frac{v \cdot a}{|v| \cdot |a|}$$

$$|v| = \sqrt{2^2 + 6^2} = \sqrt{4 + 36} = \sqrt{40} \quad |a| = \sqrt{1} = 1$$

$$\cos \theta = \frac{(2,6,0) \cdot (1,0,0)}{\sqrt{40} \cdot 1} = \frac{2 \cdot 1 + 6 \cdot 0 + 0 \cdot 0}{\sqrt{40}} = \frac{2}{\sqrt{40}} = 0,3162$$

$$\theta = \cos^{-1}(0,3162) = 71,567^\circ$$

$$\gamma) r_1(t) = \frac{(t+1)^2}{2}\hat{i} + (-9+6t)\hat{j} - 12\hat{k} \quad r_1(t = 3\text{sec}) = \frac{(3+1)^2}{2}\hat{i} + (-9+6 \cdot 3)\hat{j} - 12\hat{k}$$

$$r_1(t = 3\text{sec}) = 8\hat{i} + 9\hat{j} - 12\hat{k}$$

$$r_2 - r_1 = -20\hat{i} - 11\hat{j} + 15\hat{k}$$

$$S = |r_2 - r_1| = \sqrt{20^2 + 11^2 + 15^2} = \sqrt{746} \text{ m}$$

Άσκηση

Σώμα μάζας m που τη χρονική στιγμή $t = 0$ βρίσκεται στη θέση $r_0 = R\hat{i} + 0\hat{j}$ και έχει αρχική ταχύτητα $v_0 = 0\hat{i} + R\omega\hat{j}$, αρχίζει να κινείται υπό την επίδραση της δύναμης $F = -mR\omega^2(\cos\omega t\hat{i} + \sin\omega t\hat{j})$. Υπολογίστε την τροχιά $r(t)$.

Λύση

$$F = -mR\omega^2(\cos\omega t\hat{i} + \sin\omega t\hat{j})$$

$$F = m \cdot a \Rightarrow a = -R\omega^2(\cos\omega t\hat{i} + \sin\omega t\hat{j})$$

$$a = \frac{dv}{dt} \Rightarrow dv = a dt$$

$$\Rightarrow \int_{v_0=R\omega\hat{j}}^v dv = \int_0^t -R\omega^2(\cos\omega t\hat{i} + \sin\omega t\hat{j}) dt$$

$$v - R\omega\hat{j} = -R\omega \left[\sin\omega t\hat{i} + (-\cos\omega t)\hat{j} \right]_0^t$$

$$v(t) - R\omega\hat{j} = -R\omega \left[\sin\omega t\hat{i} + (1 - \cos\omega t)\hat{j} \right]$$

$$v(t) = -R\omega \sin\omega t\hat{i} + R\omega \cos\omega t\hat{j}$$

$$v = \frac{dr}{dt} \Rightarrow dr = v dt$$

$$\int_{R\hat{i}+0\hat{j}}^r dr = \int_0^t (-R\omega \sin\omega t\hat{i} + R\omega \cos\omega t\hat{j}) dt$$

$$r - R\hat{i} = R(\cos\omega t - 1)\hat{i} + R\sin\omega t\hat{j}$$

$$r(t) = R\cos\omega t\hat{i} + R\sin\omega t\hat{j}$$