

Υπολογιστικές Μέθοδοι



Μέθοδος Εσφαλμένης Θέσης (Regula Falsi)

1. Προϋπόθεση Ύπαρξης Ρίζας

Για να ξεκινήσει η μέθοδος στο διάστημα $[a, b]$, η συνάρτηση $f(x)$ πρέπει να είναι συνεχής και να ισχύει:

$$f(a) \cdot f(b) < 0$$

⇒ Η συνάρτηση πρέπει να έχει ετερόσημες τιμές στα άκρα.

2. Υπολογισμός Προσέγγισης (Τύπος)

Η νέα προσέγγιση x_1 προκύπτει από τη χορδή που ενώνει τα άκρα της συνάρτησης:

$$x_1 = a - \frac{f(a) \cdot (b - a)}{f(b) - f(a)}$$

ή ισοδύναμα:

$$x_1 = \frac{a \cdot f(b) - b \cdot f(a)}{f(b) - f(a)}$$

3. Επιλογή Νέου Διαστήματος

Ανάλογα με το πρόσημο της τιμής $f(x_1)$, ορίζουμε το επόμενο διάστημα:

- Αν $f(a) \cdot f(x_1) < 0 \Rightarrow$ Νέο διάστημα το $[a, x_1]$.
- Αν $f(x_1) \cdot f(b) < 0 \Rightarrow$ Νέο διάστημα το $[x_1, b]$.

4. Κριτήριο Ακρίβειας

Το απόλυτο σφάλμα υπολογίζεται σε σχέση με την πραγματική ρίζα x^* ή την προηγούμενη προσέγγιση:

$$\epsilon = |x^* - x_1|$$

⇒ Αν $\epsilon < 0.5 \cdot 10^{-k}$, τότε έχουμε ακρίβεια k δεκαδικών ψηφίων.

Ασκηση 1

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 1.2x - 0.5 = 0$. Να εξεταστεί αν μπορεί να εφαρμοστεί στο διάστημα $[1.24, 1.86]$ η μέθοδος εσφαλμένης θέσης. Στη συνέχεια, να βρεθεί σε πόσα δεκαδικά ψηφία είναι η ακρίβεια μετά από τη 2η επανάληψη της μεθόδου. Οι τιμές που υπολογίζονται να στρογγυλοποιούνται, όπου χρειάζεται, σε 3 δεκαδικά ψηφία.

Λύση

1. Έλεγχος δυνατότητας εφαρμογής της μεθόδου

Ορίζουμε τη συνάρτηση $f(x) = x^2 - 1.2x - 0.5$. Για να εφαρμοστεί η μέθοδος στο $[a, b]$, πρέπει η f να είναι συνεχής και να ισχύει $f(a) \cdot f(b) < 0$.

Για $a = 1.24$:

$$f(1.24) = (1.24)^2 - 1.2(1.24) - 0.5$$

$$\Rightarrow f(1.24) = 1.538 - 1.488 - 0.5$$

$$\Rightarrow f(1.24) = -0.450$$

Για $b = 1.86$:

$$f(1.86) = (1.86)^2 - 1.2(1.86) - 0.5$$

$$\Rightarrow f(1.86) = 3.460 - 2.232 - 0.5$$

$$\Rightarrow f(1.86) = 0.728$$

Επειδή $f(1.24) \cdot f(1.86) = (-0.450) \cdot 0.728 < 0$, η μέθοδος μπορεί να εφαρμοστεί.

2. 1η Επανάληψη

Χρησιμοποιούμε τον τύπο: $x_1 = a - \frac{f(a) \cdot (b-a)}{f(b) - f(a)}$

$$x_1 = 1.24 - \frac{-0.450 \cdot (1.86 - 1.24)}{0.728 - (-0.450)}$$

$$\Rightarrow x_1 = 1.24 - \frac{-0.450 \cdot 0.62}{1.178}$$

$$\Rightarrow x_1 = 1.24 + \frac{0.279}{1.178}$$

$$\Rightarrow x_1 = 1.24 + 0.237$$

$$\Rightarrow x_1 = 1.477$$

Ελέγχουμε την τιμή της f στο x_1 :

$$f(1.477) = (1.477)^2 - 1.2(1.477) - 0.5$$

$$\Rightarrow f(1.477) = 2.182 - 1.772 - 0.5$$

$$\Rightarrow f(1.477) = -0.090$$

3. 2η Επανάληψη

Επειδή $f(1.477) < 0$ και $f(1.86) > 0$, η ρίζα βρίσκεται στο διάστημα $[1.477, 1.86]$.

Άρα $a = 1.477$ και $b = 1.86$.

$$x_2 = 1.477 - \frac{f(1.477) \cdot (1.86 - 1.477)}{f(1.86) - f(1.477)}$$

$$\Rightarrow x_2 = 1.477 - \frac{-0.090 \cdot 0.383}{0.728 - (-0.090)}$$

$$\Rightarrow x_2 = 1.477 + \frac{0.034}{0.818}$$

$$\Rightarrow x_2 = 1.477 + 0.042$$

$$\Rightarrow x_2 = 1.519$$

4. Υπολογισμός Ακρίβειας

Βρίσκουμε την ακριβή ρίζα της $x^2 - 1.2x - 0.5 = 0$ με τη διακρίνουσα:

$$\Delta = (-1.2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-0.5) = 1.44 + 2 = 3.44$$

$$x = \frac{1.2 + \sqrt{3.44}}{2} \approx \frac{1.2 + 1.8547}{2} \approx 1.527$$

Υπολογίζουμε το απόλυτο σφάλμα:

$$|x - x_2| = |1.527 - 1.519| = 0.008$$

Επειδή $0.005 < 0.008 < 0.05$, η προσέγγιση $x_2 = 1.519$ είναι ακριβής σε 1 δεκαδικό ψηφίο (το 1.5).

Μέθοδος της Διχοτόμησης (Bisection Method)

1. Προϋπόθεση Ύπαρξης Ρίζας

Όπως και στην εσφαλμένη θέση, η $f(x)$ πρέπει να είναι συνεχής στο $[a, b]$ και να ισχύει:

$$f(a) \cdot f(b) < 0$$

⇒ Η ύπαρξη τουλάχιστον μίας ρίζας εξασφαλίζεται από το Θεώρημα Bolzano.

2. Υπολογισμός Προσέγγισης (Τύπος)

Η μέθοδος βασίζεται στη συνεχή υποδιαίρεση του διαστήματος ακριβώς στη μέση:

$$x_1 = \frac{a + b}{2}$$

⇒ Το x_1 είναι το μέσο του διαστήματος $[a, b]$.

3. Επιλογή Νέου Διαστήματος

Ελέγχουμε σε ποιο μισό του διαστήματος βρίσκεται η ρίζα εξετάζοντας το πρόσημο της $f(x_1)$:

- Αν $f(a) \cdot f(x_1) < 0 \Rightarrow$ Η ρίζα είναι στο αριστερό μισό $[a, x_1]$.
- Αν $f(x_1) \cdot f(b) < 0 \Rightarrow$ Η ρίζα είναι στο δεξί μισό $[x_1, b]$.

4. Κριτήριο Ακρίβειας (Σφάλμα)

Στη διχοτόμηση, το μέγιστο σφάλμα μετά από n επαναλήψεις είναι πάντα γνωστό και δίνεται από τον τύπο:

$$E_n = \frac{b - a}{2^n}$$

⇒ Για ακρίβεια k δεκαδικών ψηφίων, απαιτούμε $E_n < 0.5 \cdot 10^{-k}$.

⇒ Η μέθοδος είναι "αργή" αλλά εγγυημένη, καθώς το διάστημα μικραίνει σταθερά στο μισό σε κάθε βήμα.

Ασκηση 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + x - 1$. Να εξεταστεί αν η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ρίζα στο διάστημα $[0, 1]$ και να εκτελεστούν 3 επαναλήψεις της μεθόδου της διχοτόμησης για τον προσδιορισμό της. Οι υπολογισμοί να γίνουν με ακρίβεια 3 δεκαδικών ψηφίων.

Λύση

1. Έλεγχος Θεωρήματος Bolzano

Η $f(x)$ είναι συνεχής στο $[0, 1]$ ως πολυωνυμική.

$$\text{Για } x = 0 \Rightarrow f(0) = 0^3 + 0 - 1 = -1 < 0$$

$$\text{Για } x = 1 \Rightarrow f(1) = 1^3 + 1 - 1 = 1 > 0$$

$\Rightarrow f(0) \cdot f(1) < 0$, άρα υπάρχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(0, 1)$.

2. 1η Επανάληψη

$$\text{Διάστημα: } [a_0, b_0] = [0, 1]$$

$$x_1 = \frac{a_0 + b_0}{2} = \frac{0 + 1}{2} = 0.5$$

$$\text{Υπολογισμός τιμής: } f(0.5) = (0.5)^3 + 0.5 - 1 = 0.125 + 0.5 - 1 = -0.375$$

$$\Rightarrow f(0.5) < 0 \text{ και } f(1) > 0.$$

$\Rightarrow$ Η ρίζα βρίσκεται στο νέο διάστημα $[0.5, 1]$.

3. 2η Επανάληψη

$$\text{Διάστημα: } [a_1, b_1] = [0.5, 1]$$

$$x_2 = \frac{0.5 + 1}{2} = \frac{1.5}{2} = 0.75$$

$$\text{Υπολογισμός τιμής: } f(0.75) = (0.75)^3 + 0.75 - 1 = 0.422 + 0.75 - 1 = 0.172$$

$$\Rightarrow f(0.75) > 0 \text{ και } f(0.5) < 0.$$

$\Rightarrow$ Η ρίζα βρίσκεται στο νέο διάστημα $[0.5, 0.75]$.

4. 3η Επανάληψη

$$\text{Διάστημα: } [a_2, b_2] = [0.5, 0.75]$$

$$x_3 = \frac{0.5 + 0.75}{2} = \frac{1.25}{2} = 0.625$$

Υπολογισμός τιμής: $f(0.625) = (0.625)^3 + 0.625 - 1 = 0.244 + 0.625 - 1 = -0.131$

$\Rightarrow f(0.625) < 0$ και $f(0.75) > 0$.

$\Rightarrow$ Η ρίζα μετά από 3 επαναλήψεις προσεγγίζεται από το $x_3 = 0.625$ στο διάστημα $[0.625, 0.75]$.

Σφάλμα Προσέγγισης:

Το μέγιστο σφάλμα στην 3η επανάληψη είναι:

$$E_3 = \frac{b-a}{2^3} = \frac{1-0}{8} = 0.125$$

$\Rightarrow$ Η πραγματική ρίζα απέχει από το 0.625 το πολύ κατά 0.125.