

Διαφορικές Εξισώσεις



● Ομογενής γραμμική διαφορική Εξίσωση με σταθερούς συντελεστές

$$y' + ay = 0$$
$$\text{ή } \frac{dy}{dx} + ay = 0$$



με λύση $y(x) = Ae^{-a \cdot x}$

● Μη ομογενής γραμμική διαφορική Εξίσωση με σταθερούς συντελεστές

$$y' + ay = b$$
$$\text{ή } \frac{dy}{dx} + ay = b$$



με λύση $y(x) = Ae^{-ax} + \frac{b}{a}$

● Εφαρμογή

Να λυθεί η διαφορική εξίσωση $y' + 5y = 0$

Λύση

$$y(x) = Ae^{-ax} \Rightarrow y(x) = Ae^{-5x}$$

● Εφαρμογή

Να λυθεί η διαφορική Εξίσωση

$$y' + 2y = 6, \quad y(0) = 1$$

Λύση

$$y(x) = Ae^{-ax} + \frac{b}{a}$$

$$\Rightarrow y(x) = Ae^{-2x} + 3$$

$$y(0) = 1$$

$$\Rightarrow 1 = Ae^0 + 3 \Rightarrow 1 - 3 = A$$

$$\Rightarrow A = -2$$

$$y(x) = -2e^{-2x} + 3$$

● Γραμμική Ομογενής Διαφορική
Εξίσωση 1ης τάξης και 1ου βαθμού

$$y' + u(x)y = 0$$
$$\text{ή } \frac{dy}{dx} + u(x)y = 0$$



Σημειώσεις - Ασκήσεις

e-students.gr

698 93 94 741

με λίστη

$$y(x) = Ae^{-\int u(x) dx}$$

● Εφαρμογή

Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$y' + 2xy = 0$$



Σημειώσεις - Ασκήσεις

e-students.gr

698 93 94 741

Λίστη

$$y(x) = Ae^{-\int u(x) dx} \Rightarrow y(x) = Ae^{-\int 2x dx}$$

$$y(x) = Ae^{-\frac{2x^2}{2}}$$

$$y(x) = Ae^{-x^2}$$



Σημειώσεις - Ασκήσεις

e-students.gr

698 93 94 741

● Γραμμική Διαφορική Εξίσωση

Πρώτης τάξης

$$y' + p(x)y = q(x)$$



με λύση $y(x) = e^{-\int p(x) dx} \left[C + \int q(x) e^{\int p(x) dx} dx \right]$

● Εφαρμογή

Να λυθεί η διαφορική Εξίσωση

$$y' - 2y = x$$

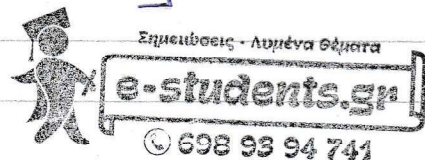
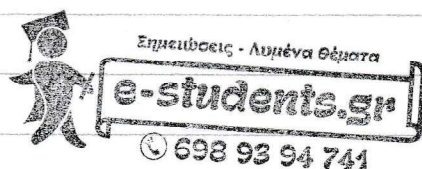
Λύση

$$p(x) = -2, q(x) = x$$

$$y(x) = e^{-\int p(x) dx} \left[C + \int q(x) e^{\int p(x) dx} dx \right]$$

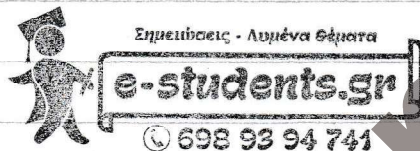
$$\bullet \int p(x) dx = \int -2 dx = -2x \quad \textcircled{1}$$

$$\bullet \int q(x) e^{\int p(x) dx} dx = \int x \cdot e^{-2x} dx \stackrel{\text{Π.Ο.}}{=} -\frac{1}{2} \int x \cdot e^{-2x} dx$$



$$= -\frac{1}{2} [x \cdot e^{-2x} - \int (x)' \cdot e^{-2x} dx]$$

$$= -\frac{1}{2} [x e^{-2x} - \int e^{-2x} dx]$$



$$= -\frac{1}{2} [x \cdot e^{-2x} + \frac{1}{2} e^{-2x}]$$

$$= -\frac{1}{2} x e^{-2x} - \frac{1}{4} e^{-2x} \textcircled{2}$$

$$y(x) = e^{-\int p(x) dx} \left[\int + \int q(x) e^{\int p(x) dx} dx \right]$$

$$\textcircled{1} \Rightarrow y(x) = e^{-(-2x)} \left[\int + \left[-\frac{1}{2} x e^{-2x} - \frac{1}{4} e^{-2x} \right] \right]$$



● Εξίσωση Bernoulli

$$\frac{dy}{dx} + p(x) \cdot y = q(x) \cdot y^a$$

Θέτω $u(x) = y^{1-a}$



● Εφαρμογή

Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$y + xy' - (x \ln x) y^2 = 0$$

Λύση

$$y + xy' - (x \ln x) y^2 = 0$$

$$\Rightarrow xy' + y = (x \ln x) y^2$$



$$\Rightarrow y' + \frac{1}{x} y = \frac{(x \ln x) y^2}{x}$$

$$\Rightarrow \underbrace{y' + \frac{1}{x} y}_{p(x)} = \underbrace{\ln x}_{q(x)} \underbrace{y^2}_{a} \rightarrow \text{Bernoulli}$$

ΘΕΤΩ $u(x) = y^{1-a}$

$u(x) = y^{2-2} \Rightarrow u(x) = y^{-1}$

$u(x) = \frac{1}{y} \Rightarrow y = \frac{1}{u} = u^{-1} \Rightarrow \boxed{y = u^{-1}} \text{ (1)}$

$\frac{dy}{dx} = -1 u^{-2} \cdot \frac{du}{dx}$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -u^{-2} \frac{du}{dx} \Rightarrow \boxed{y' = -u^{-2} u'} \text{ (2)}$

$y' + \frac{1}{x} y = \ln x y^2$

$\textcircled{1} \Rightarrow -u^{-2} u' + \frac{1}{x} u^{-1} = \ln x (u^{-1})^2$

$\textcircled{2} \Rightarrow -u^{-2} u' + \frac{1}{x} \frac{u^{-1}}{(-u^{-2})} = \ln x \left(\frac{u^{-2}}{-u^{-2}} \right)$

$\Rightarrow u' - \frac{1}{x} u = -\ln x$

$\Rightarrow \boxed{u' - \frac{1}{x} u = -\ln x}$ γραμμική διαφορική

$\underbrace{\hspace{1cm}}_{p(x)}$

$\underbrace{\hspace{1cm}}_{q(x)}$

Εξίσωση της

μορφής $y' + p(x)y = q(x)$

Σημειώσεις - Λυμένα Θέματα

e-students.gr

698 93 94 741

Σημειώσεις - Λυμένα Θέματα

e-students.gr

698 93 94 741

$$u(x) = e^{-\int p(x) dx} \left[C + \int q(x) e^{\int p(x) dx} dx \right]$$

$$\cdot \int p(x) dx = \int -\frac{1}{x} dx = \ln x$$



Εμπειρίες - Απρόβλεπτα

e-students.gr

© 698 93 94 741

$$\cdot \int q(x) e^{\int p(x) dx} dx = \int -\ln x \cdot e^{-\ln x} dx$$

$$\frac{e^{-\ln x}}{e^{-\ln x}} = - \int \frac{\ln x}{x} dx$$



Εμπειρίες - Απρόβλεπτα

e-students.gr

© 698 93 94 741

Θέτω

$$h = \ln x$$

$$dh = \frac{1}{x} dx \Rightarrow dx = dh \cdot x$$

$$= - \int \frac{h}{x} \cdot x \cdot dh = - \frac{h^2}{2} = - \frac{(\ln x)^2}{2}$$

$$u(x) = e^{-(\ln x)} \left[C + \left(-\frac{(\ln x)^2}{2} \right) \right]$$



Εμπειρίες - Απρόβλεπτα

e-students.gr

© 698 93 94 741

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{1}{y(x)} \\ \Rightarrow \frac{1}{y(x)} &= x \left[C - \frac{1}{2} (\ln x)^2 \right] \\ \Rightarrow y(x) &= \frac{1}{x \left[C - \frac{1}{2} (\ln x)^2 \right]} \end{aligned}$$

● Εξισώσεις χωριζόμενων μεταβλητών

$$P(x)dx + Q(y)dy = 0$$

● Εφαρμογή

Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$xydx + (x+1)dy = 0$$

Λύση

$$xydx + (x+1)dy = 0$$

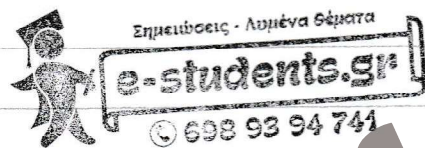
$$\Rightarrow xydx = -(x+1)dy$$

$$\Rightarrow \frac{x \cdot y}{y} dx = -\frac{(x+1)}{y} dy$$

$$\Rightarrow x dx = -\frac{(x+1)}{y} dy$$

$$\Rightarrow \frac{-x}{x+1} dx = -\frac{(x+1)}{-(x+1)y} dy$$

$$\Rightarrow -\frac{x}{x+1} dx = \frac{1}{y} dy$$



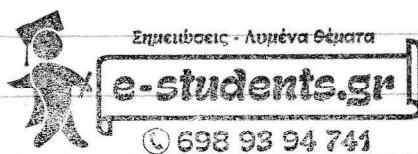
$$\Rightarrow -\int \frac{x}{x+1} dx = \int \frac{1}{y} dy$$

$$\Rightarrow -x-1+\ln|x+1|+C=\ln y$$

$$\Rightarrow e^{\ln y} = e^{-x-1+\ln|x+1|+C} \Rightarrow y = e^{-x} \cdot e^{-1} \cdot e^{\ln|x+1|} \cdot e^C$$

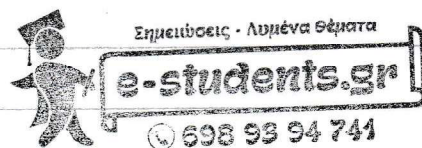
$$\Rightarrow y = e^{-x} \cdot \frac{1}{e} \cdot |x+1| \cdot e^C \Rightarrow y = e^{-x} \cdot |x+1| \cdot C_1$$

$$\bullet \int \frac{1}{y} dy = \ln y \quad \textcircled{2}$$



$$\bullet -\int \frac{x}{x+1} dx = ?$$

$$\text{Θέτω } u = x+1 \Rightarrow x = u-1 \\ du = dx$$



$$-\int \frac{x}{x+1} dx = -\int \frac{u-1}{u} du = -\int (1 - \frac{1}{u}) du$$

$$= -\int (1 - u^{-1}) du = -\int 1 - \frac{1}{u} du = -[u - \ln u]$$

$$= -[x+1-\ln|x+1|]$$

$$= -x-1+\ln|x+1| \quad (2)$$



e-students.gr

● Εξισώσεις Ολικών Διαφορών

ή Ακριβείς



Σημειώσεις - Λυμένα Θέματα

e-students.gr

© 698 93 94 741

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

● Κριτήριο ακριβείας

Η παραπάνω διαφορική εξίσωση είναι ακριβής αν και μόνο αν ισχύει η ισότητα

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$

● Εφαρμογή



Σημειώσεις - Λυμένα Θέματα

e-students.gr

© 698 93 94 741

Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$e^{-y} dx - (2y + xe^{-y}) dy = 0$$

Λύση

1^ο Έλεγχος ακριβείας

$$M(x,y) = e^{-y}$$

$$N(x,y) = -(2y + xe^{-y})$$



Σημειώσεις - Λυμένα Θέματα

e-students.gr

© 698 93 94 741

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial (\bar{e}^y)}{\partial y} = \bar{e}^y \cdot \frac{\partial (y)}{\partial y}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial M}{\partial y} = \bar{e}^y} \quad (1)$$



Σημειώσεις - Αιτιολογήματα

e-students.gr

© 698 93 94 741

$$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial (-2y + x\bar{e}^y)}{\partial x}$$

$$= \frac{\partial (-2y)}{\partial x} - \frac{\partial (x\bar{e}^y)}{\partial x}$$

$$= 0 - \bar{e}^y \Rightarrow \boxed{\frac{\partial N}{\partial x} = -\bar{e}^y} \quad (2)$$

$\Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$
Είναι αληθές

2011



Σημειώσεις - Αιτιολογήματα

e-students.gr

© 698 93 94 741

Ηφαιν είναι αληθές θα ισχύει

$$df(x,y) = \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}}_{M} dx + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}}_{N} dy$$

Πάχυν να βρω την $f(x,y) = ?$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M(x,y) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = \bar{e}^y \Rightarrow f(x,y) = \int \bar{e}^y dx + C(y)$$

$f(x,y) = xe^{-y} + c(y)$, όπου $c(y)$ μια αυθαίρετη

διαφορίσιμη συνάρτηση

$c(y) = ?$



Σημειώσεις - Λυμένα Θέματα

e-students.gr

© 698 93 94 741

παραγωγίζω την $f(x,y)$ ως προς y

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial (xe^{-y} + c(y))}{\partial y} = \frac{\partial (xe^{-y})}{\partial y} + \frac{\partial (c(y))}{\partial y}$$

$$= -xe^{-y} + \frac{\partial c}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = -xe^{-y} + \frac{\partial c}{\partial y} \quad (3)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = N(x,y)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = -(2y + xe^{-y}) \quad (4)$$



Σημειώσεις - Λυμένα Θέματα

e-students.gr

© 698 93 94 741

$$\begin{array}{l} (3) \\ (4) \end{array} \rightarrow \cancel{-xe^{-y} + \frac{\partial c}{\partial y}} = \cancel{-2y - xe^{-y}}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial c}{\partial y} = -2y$$

$$\Rightarrow C(y) = \int -2y \, dy$$

$$\Rightarrow C(y) = -\frac{2y^2}{2} + C_1$$

$$\Rightarrow C(y) = -y^2 + C_1$$

H0a

$$f(x, y) = x e^{-y} + C(y)$$

$$\Rightarrow f(x, y) = x e^{-y} - y^2 + C_1$$



Σημειώσεις - Λυμένα Θέματα

e-students.gr

☎ 698 93 94 741



Σημειώσεις - Λυμένα Θέματα

e-students.gr

☎ 698 93 94 741