

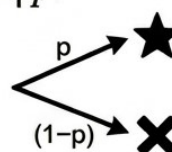
Στατιστική II

Διωνυμική κατανομή

Θέλουμε τον αριθμό επιτυχιών σε σταθερό αριθμό η ανεξάρτητων δοκιμών, όπου σε όπου κάθε δοκιμή κάθε δοκιμή η πιθανότητα επιτυχίας σταθερή p .

$$X \sim \text{Bin}(n, p)$$

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$



$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$



Σημειώσεις - Λυμένα θέματα

e-students.gr

☎ 698 93 94 741



- n : αριθμός ανεξάρτητων δοκιμών (σταθερό, θετικό ακέραιο).
- p : πιθανότητα επιτυχίας σε κάθε δοκιμή.
- k : αριθμός επιτυχιών.



Διωνυμική Κατανομή

Θέλουμε τον αριθμό επιτυχιών σε σταθερό αριθμό n ανεξάρτητων δοκιμών, όπου σε κάθε δοκιμή η πιθανότητα επιτυχίας είναι σταθερή p .

$$X \sim \text{Bin}(n, p), \quad x = 0, 1, \dots, n$$

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$

$$\text{όπου } \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

n : αριθμός ανεξάρτητων δοκιμών (σταθερό, θετικό ακέραιο).

p : πιθανότητα επιτυχίας σε κάθε δοκιμή.

k : αριθμός επιτυχιών.

Μέση τιμή και Διασπορά

$$\mathbb{E}[X] = np$$

$$\text{Var}(X) = np(1 - p).$$

Άσκηση

Σε μια ομάδα 20 ατόμων κάθε συμμετέχων απαντά σε μία ίδια ερώτηση. Κάθε άτομο έχει πιθανότητα 30% να απαντήσει σωστά, ανεξάρτητα από τους υπόλοιπους. Θεωρούμε ότι το μάθημα θεωρείται «περασμένο» όταν υπάρχουν τουλάχιστον 6 σωστές απαντήσεις.

1. Υπολογίστε την πιθανότητα ακριβώς 6 άτομα να απαντήσουν σωστά.
2. Υπολογίστε την πιθανότητα να πέρασει το μάθημα
3. Υπολογίστε την πιθανότητα να απαντήσουν σωστά 3 έως 8 άτομα
4. Δεδομένου ότι ήδη γνωρίζουμε πως τουλάχιστον 5 άτομα απάντησαν σωστά, ποια είναι η πιθανότητα ότι τουλάχιστον 10 άτομα συνολικά θα έχουν απαντήσει σωστά;
5. Υπολογίστε τον αναμενόμενο αριθμό σωστών απαντήσεων και τη διασπορά.

Λύση

Ορίζουμε X ως τον αριθμό των ατόμων που απαντούν σωστά.

$$n=20, p=0.3$$

$$1. P(X=6)=?$$

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$

$$\Rightarrow P(X=6) = \binom{20}{6} 0.3^6 (1-0.3)^{20-6}$$

$$\Rightarrow P(X=6) = \frac{20!}{6!(20-6)!} 0.3^6 (0.7)^{14}$$

$$\Rightarrow P(X=6) = \frac{20!}{6!(14)!} 0.3^6 (0.7)^{14}$$

$$\Rightarrow P(X=6) = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot \dots \cdot 1}{6! \cdot 14 \cdot \dots \cdot 1} 0.3^6 (0.7)^{14}$$

$$\Rightarrow P(X=6) = 38760 \cdot 0.000729 \cdot 0.091189$$

$$\Rightarrow P(X=6) \approx 0.19164$$

$$2. P(X \geq 6)=?$$

$$P(X \geq 6) = 1 - P(X < 6)$$

$$\Rightarrow P(X \geq 6) = 1 - [P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) + P(X=4) + P(X=5)]$$

$$\Rightarrow P(X \geq 6) = 1 - [0.00079 + 0.00683 + 0.02784 + 0.07160 + 0.13042 + 0.178863]$$

$$\Rightarrow P(X \geq 6) \approx 0.58362$$

$$P(X=0) = \binom{20}{0} 0.3^0 (1-0.3)^{20-0} = 0.00079$$

$$P(X=1) = \binom{20}{1} 0.3^1 (1-0.3)^{20-1} = 0.00683$$

$$P(X=2) = \binom{20}{2} 0.3^2 (1-0.3)^{20-2} = 0.02784$$

$$P(X=3) = \binom{20}{3} 0.3^3 (1-0.3)^{20-3} = 0.07160$$

$$P(X=4) = \binom{20}{4} 0.3^4 (1-0.3)^{20-4} = 0.13042$$

$$P(X=5) = \binom{20}{5} 0.3^5 (1-0.3)^{20-5} = 0.178863$$

3. $P(3 \leq X \leq 8) = ?$

$$P(3 \leq X \leq 8) = P(X=3) + P(X=4) + P(X=5) + P(X=6) + P(X=7) + P(X=8)$$

$$\Rightarrow P(3 \leq X \leq 8) = 0.07160 + 0.13042 + 0.178863 + 0.191638 + 0.16426 + 0.11439$$

$$\Rightarrow P(3 \leq X \leq 8) \approx 0.8511854$$

$$P(X=6) = \binom{20}{6} 0.3^6 (1-0.3)^{20-6} = 0.191638$$

$$P(X=7) = \binom{20}{7} 0.3^7 (1-0.3)^{20-7} = 0.16426$$

$$P(X=8) = \binom{20}{8} 0.3^8 (1-0.3)^{20-8} = 0.11439$$

4. $P(X \geq 10 | X \geq 5) = ?$

$$P(X \geq 10 | X \geq 5) = \frac{P(X \geq 10)}{P(X \geq 5)}$$

$$\Rightarrow P(X \geq 10 | X \geq 5) = \frac{0.001556}{0.024735}$$

$$\Rightarrow P(X \geq 10 | X \geq 5) \approx 0.06290$$

5. $E[X] = np$

$$\text{Var}(X) = np(1-p).$$

Εφαρμόζοντας $n=20$, $p=0.3$:

$$E[X] = 20 \cdot 0.3 = 6$$

$$\text{Var}(X) = 20 \cdot 0.3 \cdot 0.7 = 20 \cdot 0.21 = 4.2$$