

Θεωρητικές Κατανομές Πιθανότητας

Διακριτές Τυχαίες Μεταβλητές

- 1) Βερνούλλι
- 2) Πωσονίου
- 3) Γεωμετρική
- 4) Αριθμητική Πωσονίου
- 5) Υπεργεωμετρική
- 6) Poisson
- 7) Πολυωνομική



Συνεχείς Τυχαίες Μεταβλητές

- 1) Ομοιόμορφη
- 2) Εξθετική
- 3) Κανονική
- 4) Γάμμα
- 5) Weibull
- 6) t
- 7) F



1) Κατανομή Βερινουλι

Πειράματα που έχουν δύο δυνατά αποτελέσματα
(επιτυχία - αποτυχία)

$$f(x) = P(X=x) = p^x (1-p)^{1-x}, \quad x=0,1,$$

$$\bullet \mu = E(X) = p$$

$$\bullet \sigma^2 = V(X) = p(1-p)$$

2) Διωνυμική κατανομή

Ευτελούμε n ανεξάρτητα πειράματα

X τ.μ. η οποία δηλώνει πόσες επιτυχίες υπάρχουν
στην ακολουθία των n ανεξάρτητων δοκιμών

$$f(x) = P(X=x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, \quad x=0,1,\dots,n$$

$$\bullet \mu = E(X) = np$$

$$\bullet \sigma^2 = V(X) = np(1-p)$$

Εφαρμογή

Ασφαλιστής ασφαλίει 15 αυτοκίνητα. Από πη-
 ότερα στοιχεία είναι γνωστό ότι το 5% των
 αυτοκινήτων της εν λόγω εταιρείας παρουσιάζουν
 βλάβη ανά έτος.

- α) Ποιά η πιθανότητα σε 1 έτος :
- i) να παρουσιάσουν 2 αυτοκίνητα βλάβη
 - ii) να παρουσιάσουν τουλάχιστον 1 βλάβη
- β) Αν για κάθε αυτοκίνητο που παρουσιάζει βλάβη
 λαμβάνεται αποζημίωση 500€. Ποιά είναι
 το αναμενόμενο ποσό αποζημίωσης για
 1 χρόνο?

Λύση

$$n = 15$$

$$p = 0,05$$

α) X : τ.μ που μετράει τα αυτοκίνητα με βλάβη

$$i) P(X=2) = \binom{15}{2} 0,05^2 (1-0,05)^{13} = 0,1348$$

$$ii) P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - P(X=0) = 1 - 0,4633 = 0,5367$$

β) Y : τ.μ που μετράει το ποσό αποζημίωσης
 στο εν λόγω έτος

$$E(Y) = E(500 \cdot X) = 500 \cdot E(X) = 500 \cdot n \cdot p$$

$$= 500 \cdot 15 \cdot 0,05 \Rightarrow E(Y) = 375 \text{ €}$$

Κάθε δείγμα από τον αέρα έχει πιθανότητα 0,1 να περιέχει μαγιο σπάνιο μόριο. Να βρεθούν οι πιθανότητες στα έτη 18 δείγματα που θα επιλεγούν

- αυριώς 2 να περιέχουν το σπάνιο μόριο
- το πολύ 3 να περιέχει το σπάνιο μόριο
- και ο αριθμός δειγμάτων που περιέχουν το σπάνιο μόριο είναι μεταξύ 3 και 5.

Λύση

$$p=0,1, n=18$$

$$P(X=2) = \binom{18}{2} \cdot 0,1^2 (1-0,1)^{18-2} = 0,28351$$

$$\begin{aligned} P(X \leq 3) &= P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) \\ &= \binom{18}{0} \cdot 0,1^0 (1-0,1)^{18-0} + \binom{18}{1} \cdot 0,1^1 (1-0,1)^{18-1} + \binom{18}{2} \cdot 0,1^2 (1-0,1)^{18-2} \\ &\quad + \binom{18}{3} \cdot 0,1^3 (1-0,1)^{18-3} = 0,15 + 0,3 + 0,28 + 0,16 = 0,89 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(3 \leq X \leq 5) &= P(X=3) + P(X=4) + P(X=5) \\ &= 0,16 + 0,07 + 0,021 = 0,25 \end{aligned}$$

3) Γεωμετρική κατανομή

Σε αυτή την περίπτωση ευνεχούνται ανεξάρτητα πειράματα μέχρι να πραγματοποιηθεί επιτυχία για πρώτη φορά.

X : τ.μ η οποία δηλώνει τον αριθμό των δοκιμών μέχρι να έχουμε για πρώτη φορά επιτυχία.

$$P(X=x) = q^{x-1} \cdot p, \quad x=1, 2, \dots \text{ ή } q=1-p$$

$$\bullet \mu = E(X) = \frac{1}{p}$$

$$\bullet \sigma^2 = \text{Var}(X) = \frac{q}{p^2}$$

4) Αρνητική διωνυμική κατανομή

Γενίωση της γεωμετρικής κατανομής

X τ.μ η οποία παραστάει τον αριθμό δοκιμών που απαιτούνται μέχρι να σημειωθούν ακριβώς r επιτυχίες για πρώτη φορά.

$$P(X=x) = \binom{x-1}{r-1} p^r (1-p)^{x-r}$$

$(x \geq r)$

$$\mu = E(X) = \frac{r}{p}, \quad \sigma^2 = \text{Var}(X) = \frac{rq}{p^2}$$

Εφαρμογή / Αριθμητική Διων. κατανομή

Για την πρόσληψη του διευθυντή πωλήσεων ενός καταστήματος μία επιτροπή έχει να επιλέξει από ένα πλήθος υποψηφίων που υπέβαλαν αίτηση. Η επιτροπή αποφασίζει να εξετάσει έναν-έναν, που επιλέγεται τυχαία, προκειμένου να επιλέξει τρεις από το σύνολο των υποψηφίων για να καλύψει τρεις θέσεις λογιστών. Υποτίθεται ότι 40% των υποψηφίων είναι ικανοί να καταλάβουν μία από αυτές τις θέσεις. Να βρεθεί η πιθανότητα οι θέσεις να καλυφθούν με τον πέμπτο εξεταζόμενο υποψήφιο.

4> A. Δ. Κ.

Λύση

Χ: Τ.μ που αναγραφιστάται αριθμό των εξεταζόμενων υποψηφίων που απτυχχάνουν μέχρι την κάλυψη και της τρίτης θέσης λογιστή

$$p = 0,4$$

$$r = 3, X = 5$$

$$P(X=5) = \binom{5-1}{3-1} \cdot 0,4^3 \cdot (0,6)^{5-3}$$

$$= \binom{4}{2} \cdot 0,4^3 \cdot 0,6^2$$

$$= 0,1382.$$

5) Υπεργεωμετρική κατανομή

Όταν κάνουμε δειγματοληψία χωρίς επαναστροφή από ένα πεπερασμένο πληθυσμό με έναν μέτρο του να έχει κάποιο χαρακτηριστικό που μας ενδιαφέρει

X τη που μετράει τον αριθμό των επιτυχιών σε ένα δείγμα προσαρμοσμένου μεγέθους

N μέγεθος του πληθυσμού

k πλήθος των ατόμων του πληθυσμού που έχουν το χαρακτηριστικό που μας ενδιαφέρει.

n : το μέγεθος του δείγματος που παίρνω

$$P(X=x) = \frac{\binom{k}{x} \binom{N-k}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

$$\bullet \mu = E(x) = np$$

$$\bullet \sigma^2 = \text{Var}(x) = np(1-p) \frac{N-n}{N-1} \quad , \quad p = \frac{k}{N}$$

Εφαρμογή



Σημειώσεις - Λυμένα Θέματα

e-students.gr

☎ 698 93 94 741

Ο αριθμός των ενήλικων καπνιστών μιας πόλης είναι 75.000 από τους οποίους οι 500 είναι οικονομολόγοι. Σε μια δειγματοληπτική έρευνα γίνεται μια τυχαία επιλογή 25 ενήλικων χωρίς επανιάθεση. Να υπολογισθεί η πιθανότητα το δείγμα αυτό να περιλαμβάνει το πολύ έναν οικονομολόγο.

Λύση

$$N = 75.000$$

$$k = 500$$

$$n = 25$$



Σημειώσεις - Λυμένα Θέματα

e-students.gr

☎ 698 93 94 741

$$P(X \leq 1) = P(X=0) + P(X=1)$$

$$P(X \leq 1) = \frac{\binom{500}{0} \binom{74.500}{25}}{\binom{75.000}{25}} + \frac{\binom{500}{1} \binom{74.500}{24}}{\binom{75.000}{25}}$$

$$P(X \leq 1) = 0,98798$$

6) Κατανομή Poisson

X παριστάνει τον αριθμό πραγματοποιήσεων του A σε ένα ορισμένο χρονικό ή τοπικό διάστημα

$$P(X=x) = f(x) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}$$

- $\mu = E(X) = \lambda$

- $\sigma^2 = \text{Var}(X) = \lambda$

! Προέγερση της διωνυμικής κατανομής όταν το n είναι μεγάλο και το p μικρό
 $n > 30$ ή $n < 5$

Εφαρμογή



Σημειώσεις - Λυμένα θέματα

e-students.gr

☎ 698 93 94 741

Υποθέτουμε ότι ο αριθμός των τυπογραφικών λαθών ανά σελίδα ακολουθεί την κατανομή Poisson. Ένα βιβλίο με 200 σελίδες έχει 40 τυπογραφικά λάθη.

1. Αν επιλέξουμε 10 σελίδες από το παραπάνω βιβλίο. Να βρεθεί η πιθανότητα να μην έχουν τυπογραφικά λάθη.

2. Αν διαλέξουμε, τυχαία, 8 διαφορετικά 10σέλιδα από το παραπάνω βιβλίο. Ποιά η πιθανότητα τουλάχιστον 3 10σέλιδα να μην έχουν τυπογραφικά λάθη?

3. Πόσος θα είναι ο αναμενόμενος αριθμός 10σέλιδων από το παραπάνω βιβλίο που δεν θα έχουν κανένα τυπογραφικό λάθος.



Σημειώσεις - Λυμένα θέματα

e-students.gr

☎ 698 93 94 741

Λύση

1) X : μετράει τα τυπογραφικά λάθη ανά 10 σελίδες
λ: μέσος όρος των λαθών ανά 10 σελίδες

$$\lambda = \frac{40 \cdot 100}{200} = 2$$

$$P(X=0) = e^{-2} \cdot \frac{2^0}{0!} = 0.135$$

2. Y : μετράει τα 10σέλιδα που δεν έχουν καμία τυπογραφική λάθος

$$p = 0,135$$
$$n = 8$$



$$P(Y \geq 3) = 1 - P(Y < 3) = 1 - [P(Y=0) + P(Y=1) + P(Y=2)]$$

$$P(Y=0) = \binom{8}{0} (0,135)^0 (1-0,135)^{8-0} = 0,312$$

$$P(Y=1) = \binom{8}{1} 0,135^1 (1-0,135)^{8-1} = 0,391$$

$$P(Y=2) = \binom{8}{2} \cdot 0,135^2 (1-0,135)^{8-2} = 0,214$$

$$P(Y \geq 3) = 0,083$$



3. Διαθέτουμε $n=20$ 10σέλιδα, οπότε ο ανεξάρτητος αριθμός (μέση τιμή) θα είναι:

$$np = 20 \cdot 0,135 = 2,7$$

7) Πολυωνομική κατανομή

Έστω πείραμα τύχης με k δυνατά αποτελέσματα $A_1, \dots, A_k$. Έστω οι n πιθανότητες πραγματοποίησης του A_i $x_1, \dots, x_k$ παριστάουν τον αριθμό πραγματοποίησης των γεγονότων

$$P(X_1=x_1, \dots, X_k=x_k) = \frac{n!}{x_1! x_2! \dots x_k!} \cdot q_1^{x_1} q_2^{x_2} \dots q_k^{x_k}$$



Σημειώσεις - Λυμένα θέματα

e-students.gr

☎ 698 93 94 741

1) Ομοιόμορφη κατανομή

Μια τ.μ. ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα (a, b) αν ορισδήποτε υποδιαστήματα ίσους μήκους έχουν την ίδια πιθανότητα να πραγματοποιηθούν

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x < a \\ \frac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 1, & b < x < \infty \end{cases}$$

$$\mu = E(x) = \frac{a+b}{2}$$

$$\sigma^2 = V(x) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 1, & x > b \end{cases}$$



2) Εξθετική κατανομή

Προγράφει το χρονικό διάστημα μεταξύ δύο διαδοχικών επιτυχιών

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$$

$$, x > 0, \lambda > 0$$

$$\bullet \mu = E(x) = \frac{1}{\lambda}$$

$$\bullet \sigma^2 = \text{Var}(x) = \frac{1}{\lambda^2}$$



● Εφαρμογή

Υποθέτουμε ότι η διάρκεια ζωής μιας ηλεκτρονικής συσκευής ακολουθεί την εξθετική κατανομή με μέση τιμή 1,5 χρόνια. Να βρεθούν οι πιθανότητες

- 1) Μια συσκευή να διαρκέσει τουλάχιστον 3 χρόνια

$$P(X \geq 3) = 1 - P(X < 3)$$

$$\begin{aligned} &= 1 - [P(X=0) + P(X=1) + P(X=2)] \\ &= 1 - [1,5 \cdot e^0 + 1,5 \cdot e^{-1,5} + 1,5 \cdot e^{-2 \cdot 1,5}] \\ &= \dots \end{aligned}$$

3) Κανονική κατανομή $N(\mu, \sigma^2)$



Σημειώσεις - Λυμένα θέματα

e-students.gr

© 698 93 94 741

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left[-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2 \right], -\infty < x < \infty$$

- $\mu = E(x)$

- $\sigma^2 = \text{Var}(x)$

! Υπάρχουν πίνακες που μας δίνουν την πιθανότητα $P(X \leq x)$ για $X \sim N(0,1)$, $P(X \leq x) = \Phi(x)$

- Αν X τ.μ με $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, τότε η τυποποιημένη τ.μ $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$ ακολουθεί την τυπική κανονική κατανομή



Σημειώσεις - Λυμένα θέματα

e-students.gr

© 698 93 94 741

$$\rightarrow P(X \leq x_1) = P(Z \leq z_1) \text{ ΠΙΝΑΚΑΣ}$$

$$\rightarrow P(X \geq x_1) = 1 - P(X \leq x_1) = 1 - P(Z \leq z_1) \text{ ΠΙΝΑΚΑΣ}$$

$$\rightarrow P(x_1 \leq X \leq x_2) = P(X \leq x_2) - P(X \leq x_1) = P(Z \leq z_2) - P(Z \leq z_1)$$



● Εφαρμογή

Η ολιμή ετήσια βροχόπτωση σε μια περιοχή ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή $\mu = 70\text{cm}$ και τυπική απόκλιση $\sigma = 12\text{cm}$

α) Σε τι ποσοστό των ετών η ολιμή βροχόπτωση υπερβαίνει τα 92cm

β) Ποια η πιθανότητα η ολιμή βροχόπτωση στο επόμενο χρόνο να είναι μεταξύ 50 και 80cm

γ) Βρείτε το σημείο για το οποίο η πιθανότητα η ολιμή ετήσια βροχόπτωση να το ξεπερνάει να είναι το 30% .

δ) Να υπολογιστεί η πιθανότητα σε 2 από τα επόμενα 10 χρόνια η ολιμή βροχόπτωση να υπερβαίνει τα 92cm



Λύση

$$\mu = 70\text{cm}$$

$$\sigma = 12\text{cm}$$

$$\begin{aligned} \alpha) P(X \geq 92) &= 1 - P(X \leq 92) = 1 - P\left(Z \leq \frac{92 - 70}{12}\right) \\ &= 1 - P(Z \leq 1,83) = 1 - 0,9664 = 0,0336 = 3,36\% \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta) P(50 \leq X \leq 80) &= P(X \leq 80) - P(X \leq 50) \\ &= P\left(Z \leq \frac{80 - 70}{12}\right) - P\left(Z \leq \frac{50 - 70}{12}\right) = P(Z \leq 0,83) - P(Z \leq -1,66) \\ &= P(Z \leq 0,83) - (1 - P(Z \leq 1,66)) = 0,7967 - (1 - 0,9515) \\ &= 0,7482 \end{aligned}$$

$$\gamma) P(X \geq x_{0,3}) = 30\%$$

$$x_{0,3} = ?$$

$$P(X \geq x_{0,3}) = 0,3$$

$$\Rightarrow 1 - P(X \leq x_{0,3}) = 0,3$$

$$\Rightarrow 1 - 0,3 = P(X \leq x_{0,3})$$

$$\Rightarrow 0,7 = P(X \leq x_{0,3})$$

$$Z = \frac{x_{0,3} - \mu}{\sigma}$$

$$\Rightarrow 0,52 = \frac{x_{0,3} - 70}{12}$$

$$\Rightarrow x_{0,3} = 76,24 \text{ cm}$$



Σημειώσεις - Λυμένα Θέματα

e-students.gr

☎ 698 93 94 741



Σημειώσεις - Λυμένα Θέματα

e-students.gr

☎ 698 93 94 741

δ) $Y \sim \text{Τ.μ}$ που μετράει τα έτη

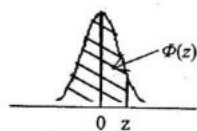
$$n = 10$$

$$y = 2$$

$$P(Y=2) = \binom{10}{2} \cdot 0,0336^2 (1-0,0336)^{10-2}$$

$$= 0,03865$$

Πίνακας Π1. Αθροιστική συνάρτηση κατανομής,
 $\Phi(z) = P(Z \leq z)$, της τυπικής κανονικής κατανομής

[illegible]



4) Κατανομή Γάμμα

Ευφράει συνήθως δείγματα πριν των ασθενών χρόνος αναμονής, αυτοκίς υλίων, ...

$$f(x) = \frac{1}{\beta^a \Gamma(a)} x^{a-1} e^{-x/\beta}, \quad x > 0$$

$$\Gamma(a) = \int_0^{\infty} e^{-y} y^{a-1} dy$$

- $E(x) = a \cdot \beta$
- $\text{Var}(x) = a \beta^2$

● Κατανομή χ_n^2



Για $a = \frac{n}{2}$ και $\beta = 2$ προκύπτει μια κατανομή που ονομάζεται χ_n^2 και είναι ιδιαίτερα χρήσιμη στη στατιστική συμπερασματολογία.

και ορίζεται ως το άθροισμα η ανεξαρτητως τ.μ $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$ όπου $Z_i \sim N(0,1)$

$$\chi_n^2 = \sum_{i=1}^n Z_i^2$$

Αν $X_1, X_2, \dots, X_n$ η ανεξάρτητες τ.μ όπου $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$

$$Y = \sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i - \mu}{\sigma} \right)^2 \sim \chi_n^2$$



5) Κατανομή t_n

Η κατανομή t_n μπορεί να οριστεί ως ο λόγος δύο Τ.μ. μιας Τ.μ. που ακολουθεί την τυπική κατανομή δια της τετραγωνικής ορίσας μας χ_n^2 που έχει διαμορφωθεί με τους βαθμούς ελευθερίας της.

$$t_n = \frac{N(0,1)}{\sqrt{\frac{\chi_n^2}{n}}}$$



6) Κατανομή Weibull

$$f(x) = a\lambda^a x^{a-1} e^{-(\lambda x)^a}$$

7) Κατανομή F_{n_1, n_2}

$$F_{n_1, n_2} = \frac{\frac{\chi_{n_1}^2}{n_1}}{\frac{\chi_{n_2}^2}{n_2}}$$