

Πιθανότητες-Στατιστική



Θεωρία Πιθανοτήτων

Τυχαίο πείραμα (πειράματα τύχης)

Ορισμός: Ένα πείραμα του οποίου το αποτέλεσμα δεν μπορούμε να το προβλέψουμε με βεβαιότητα, αλλά γνωρίζουμε όλες τις πιθανές εκβάσεις.

Παράδειγμα: Ρίψη ενός ζαριού. Δεν ξέρουμε τι θα φέρει, αλλά ξέρουμε ότι τα αποτελέσματα είναι οι αριθμοί 1–6.

Δειγματικός χώρος

Συμβολισμός: Ω

Ορισμός: Το σύνολο όλων των δυνατών εκβάσεων ενός τυχαίου πειράματος.

Παράδειγμα: Για ρίψη ζαριού,

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Ενδεχόμενο

Συμβολισμός: Συνήθως με γράμματα κεφαλαία (π.χ. A, B, C, A, B, C, A, B, C).

Ορισμός: Κάθε υποσύνολο του δειγματικού χώρου. Αν συμβεί μία από τις εκβάσεις που περιέχονται στο σύνολο, τότε λέμε ότι συνέβη το ενδεχόμενο.

Παράδειγμα: Στη ρίψη ζαριού:

- Ενδεχόμενο A: «φέρνουμε άρτιο αριθμό»

$$A = \{2, 4, 6\}$$

- Ενδεχόμενο B: «φέρνουμε αριθμό > 4 »

$$B = \{5, 6\}$$

Πράξεις Ενδεχομένων

Ένωση ($A \cup B$)

Ορισμός: Συμβαίνει όταν συμβεί το A ή το B.

Παράδειγμα:

$$A = \{2, 4, 6\}, B = \{2, 3, 5\},$$

$$A \cup B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$$

Τομή ($A \cap B$)

Ορισμός: Συμβαίνει μόνο αν συμβούν ταυτόχρονα το A και το B.

Παράδειγμα:

$$A = \{2, 4, 6\}, B = \{2, 3, 5\},$$

$$A \cap B = \{2\}$$

Συμπλήρωμα A^c

Ορισμός: Είναι το ενδεχόμενο να μην συμβεί το A αλλά να είναι εντός του δειγματικού χώρου.

Παράδειγμα: $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$, $A = \{2,4,6\}$,
 $A^c = \{1,3,5\}$

Διαφορά δύο ενδεχομένων $A-B$ ($A \cap B^c$)

Ορισμός: Συμβαίνει το A, αλλά όχι το B

Παράδειγμα: $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$,
 $A = \{2,4,6\}$, $B = \{2,3,5\}$,
 $A-B = \{4,6\}$

Ασυμβίβαστα Ενδεχόμενα

Δύο ενδεχόμενα A και B λέγονται **ασυμβίβαστα** (ή **ξένα**) αν δεν μπορούν να συμβούν ταυτόχρονα.

$$A \cap B = \emptyset$$

Κανόνες Πράξεων Ενδεχομένων

1. Αντιμεταθετικοί νόμοι

$$A \cup B = B \cup A$$

$$A \cap B = B \cap A$$

2. Προσεταιριστικοί νόμοι

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

3. Επιμεριστικοί νόμοι

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

4. Νόμοι του De Morgan

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

Υπόλοιποι κανόνες

$$A \cup \emptyset = A, A \cap \Omega = A$$

$$A \cup (A \cap B) = A, A \cap (A \cup B) = A$$

$$A \cup A^c = \Omega, A \cap A^c = \emptyset, A(A^c)^c = A$$

Ορισμός Πιθανότητας

Η πιθανότητα ενός ενδεχομένου A είναι το πηλίκο:

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)}$$

$N(A)$ = το πλήθος των ευνοϊκών εκβάσεων για το ενδεχόμενο A,

$N(\Omega)$ = το πλήθος όλων των δυνατών εκβάσεων (δειγματικός χώρος).

Άσκηση

Ρίχνουμε ένα ζάρι. Να βρεθεί η πιθανότητα να εμφανιστεί άρτιος αριθμός.

Λύση

Δειγματικός χώρος: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Πλήθος όλων των δυνατών εκβάσεων: $N(\Omega) = 6$

Ενδεχόμενο A: «εμφανίζεται άρτιος αριθμός», $A = \{2, 4, 6\}$

Πλήθος ευνοϊκών εκβάσεων: $N(A) = 3$

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)}$$

$$\Rightarrow P(A) = 3/6 = 1/2$$

$$\Rightarrow P(A) = 0.5 = 50\%$$



$$0 \leq P(A) \leq 1$$

$$P(\Omega) = 1$$

Τύποι Πιθανοτήτων

- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Αν τα ενδεχόμενα **A** και **B** είναι **ξένα (ασυμβίβαστα)**, δηλαδή $A \cap B = \emptyset$ τότε ο γενικός τύπος για την **ένωση** $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ γίνεται απλούστερος, αφού $P(A \cap B) = 0$

Άρα:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

- $P(A^c) = 1 - P(A)$

- $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$

Άσκηση

Σε ένα σχολείο συμμετέχουν 30 μαθητές σε δύο διαφορετικά εργαστήρια: Μαθηματικών και Φυσικής. Από αυτούς, 18 μαθητές συμμετέχουν στο εργαστήριο Μαθηματικών, 12 μαθητές στο εργαστήριο Φυσικής, και 5 μαθητές συμμετέχουν και στα δύο εργαστήρια. Επιλέγεται τυχαία ένας μαθητής. Να υπολογίσετε τις πιθανότητες για τα ακόλουθα ενδεχόμενα:

1. Πόσο πιθανό είναι ο μαθητής να συμμετέχει τουλάχιστον σε ένα από τα δύο εργαστήρια;
2. Πόσο πιθανό είναι να συμμετέχει μόνο στο εργαστήριο Μαθηματικών και όχι στο Φυσικής;
3. Πόσο πιθανό είναι να συμμετέχει μόνο στο εργαστήριο Φυσικής και όχι στο Μαθηματικών;
4. Πόσο πιθανό είναι να μην συμμετέχει σε κανένα από τα δύο εργαστήρια;
5. Αν τα εργαστήρια θεωρηθούν ξένα ενδεχόμενα, πώς αλλάζει η πιθανότητα να συμμετέχει σε τουλάχιστον ένα εργαστήριο;
6. Ποια είναι η πιθανότητα να συμμετέχει μόνο στο ένα από τα δύο εργαστήρια ;

Λύση

$$N(\Omega) = 30 \text{ (Σύνολο μαθητών)}$$

$$M = \{\text{Οι μαθητές συμμετέχουν στο εργαστήριο Μαθηματικών}\}, N(M) = 18$$

$$P(M) = \frac{N(M)}{N(\Omega)} = \frac{18}{30}$$

$\Phi = \{\text{Οι μαθητές συμμετέχουν στο εργαστήριο Φυσικής}\}, N(\Phi) = 12$

$$P(\Phi) = \frac{N(\Phi)}{N(\Omega)} = \frac{12}{30}$$

$(M \cap \Phi) = \{\text{Οι μαθητές συμμετέχουν και στα δύο εργαστήρια}\}, N(M \cap \Phi) = 5$

$$P(M \cap \Phi) = \frac{N(M \cap \Phi)}{N(\Omega)} = \frac{5}{30}$$

1. Τουλάχιστον ένα εργαστήριο ($M \cup \Phi$)

$$P(M \cup \Phi) = P(M) + P(\Phi) - P(M \cap \Phi)$$

$$\Rightarrow P(M \cup \Phi) = \frac{18}{30} + \frac{12}{30} - \frac{5}{30}$$

$$\Rightarrow P(M \cup \Phi) = \frac{25}{30}$$

$$\Rightarrow P(M \cup \Phi) = \frac{5}{6}$$

2. Μόνο Μαθηματικά και όχι Φυσική ($M - \Phi$)

$$P(M - \Phi) = P(M) - P(M \cap \Phi)$$

$$\Rightarrow P(M - \Phi) = \frac{18}{30} - \frac{5}{30}$$

$$\Rightarrow P(M - \Phi) = \frac{13}{30}$$

3. Μόνο Φυσική και όχι Μαθηματικά ($\Phi - M$)

$$P(\Phi - M) = P(\Phi) - P(M \cap \Phi)$$

$$\Rightarrow P(\Phi - M) = \frac{12}{30} - \frac{5}{30}$$

$$\Rightarrow P(\Phi - M) = \frac{7}{30}$$

4. Κανένα εργαστήριο $(M \cup \Phi)^c$

$$P((M \cup \Phi)^c) = 1 - P(M \cup \Phi)$$

$$\Rightarrow P((M \cup \Phi)^c) = 1 - \frac{5}{6}$$

$$\Rightarrow P((M \cup \Phi)^c) = \frac{1}{6}$$

5. Ένωση αν τα εργαστήρια ήταν ξένα (ασυμβίβαστα)
 $M \cap \Phi = \emptyset$

$$P(M \cup \Phi) = P(M) + P(\Phi)$$

$$\Rightarrow P(M \cup \Phi) = \frac{18}{30} + \frac{12}{30}$$

$$\Rightarrow P(M \cup \Phi) = \frac{30}{30} = 1$$

6. Μόνο ένα εργαστήριο $((M - \Phi) \cup (\Phi - M))$

$$P((M - \Phi) \cup (\Phi - M)) = P(M - \Phi) + P(\Phi - M)$$

$$\Rightarrow P((M - \Phi) \cup (\Phi - M)) = \frac{13}{30} + \frac{7}{30}$$

$$\Rightarrow P((M - \Phi) \cup (\Phi - M)) = \frac{20}{30}$$

Δεσμευμένη Πιθανότητα

Η δεσμευμένη πιθανότητα ενός ενδεχομένου A , δεδομένου ότι έχει ήδη πραγματοποιηθεί το ενδεχόμενο B , ορίζεται ως:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

A, B : ενδεχόμενα

$P(A)$: πιθανότητα να συμβεί το A

$P(A \cap B)$: πιθανότητα να συμβούν ταυτόχρονα A και B

$P(A|B)$: πιθανότητα να συμβεί το A **δεδομένου** ότι έχει ήδη συμβεί το B

Ιδιότητες

1. $0 \leq P(A|B) \leq 1$
2. Αν A και B είναι ανεξάρτητα, τότε

$$P(A|B) = P(A)$$

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Νόμος ολικής πιθανότητας (με δεσμευμένη):

Αν έχουμε μια διαμέριση του δειγματικού χώρου Ω σε ξένα ενδεχόμενα $A_1, A_2, \dots, A_n$ τότε για οποιοδήποτε ενδεχόμενο B:

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(A_i) \cdot P(B|A_i)$$

Θεώρημα Bayes:

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)}$$

Άσκηση

Σε ένα εργοστάσιο τρία διαφορετικά μηχανήματα παράγουν εξαρτήματα: η Μηχανή A παράγει το 30% της παραγωγής και από αυτά το 1% είναι ελαττωματικά, η Μηχανή B παράγει το 50% και από αυτά το 3% είναι ελαττωματικά, και η Μηχανή Γ παράγει το 20% και από αυτά το 5% είναι ελαττωματικά.

Επιλέγουμε τυχαία ένα εξάρτημα. Να βρείτε:

1. την συνολική πιθανότητα το εξάρτημα να είναι ελαττωματικό
2. την πιθανότητα ότι ένα ελαττωματικό εξάρτημα προέρχεται από τη Μηχανή A

3. την πιθανότητα ότι ένα μη ελαττωματικό εξάρτημα προέρχεται από τη Μηχανή Β.

Λύση

Ορισμοί ενδεχομένων

$A = \{\text{εξάρτημα από Μηχανή Α}\}$

$B = \{\text{εξάρτημα από Μηχανή Β}\}$

$C = \{\text{εξάρτημα από Μηχανή Γ}\}$

$E = \{\text{εξάρτημα είναι ελαττωματικό}\}$

$E^c = \{\text{εξάρτημα είναι μη ελαττωματικό}\}$

Δεδομένα (σε πιθανότητες)

$$P(A) = 0.30$$

$$P(B) = 0.50$$

$$P(C) = 0.20$$

$$P(E|A) = 0.01$$

$$P(E|B) = 0.03$$

$$P(E|C) = 0.05$$

1. Συνολική πιθανότητα ελαττωματικού $P(E)$ — Νόμος Ολικής Πιθανότητας

$$\begin{aligned} P(E) &= P(A) \cdot P(E|A) + P(B) \cdot P(E|B) + P(C) \cdot P(E|C) \\ &\Rightarrow P(E) = 0.30 \cdot 0.01 + 0.50 \cdot 0.03 + 0.20 \cdot 0.05 \\ &\Rightarrow P(E) = 0.003 + 0.015 + 0.01 \\ &\Rightarrow P(E) = 0.028 = 2.8\% \end{aligned}$$

2. Πιθανότητα ελαττωματικού να προέρχεται από Α $P(A|E)$ — Bayes

$$P(A|E) = \frac{P(E|A) \cdot P(A)}{P(E)}$$

$$\Rightarrow P(A|E) = \frac{0.01 \cdot 0.30}{0.028}$$

$$\Rightarrow P(A|E) = \frac{0.0030}{0.028}$$

$$\Rightarrow P(A|E) \approx 0.10714 (\approx 10.71\%)$$

3) Πιθανότητα μη ελαττωματικού να προέρχεται από Β $P(B|E^c)$

Πρώτα βρίσκουμε $P(E^c)$:

$$P(E^c) = 1 - P(E)$$

$$\Rightarrow P(E^c) = 1 - 0.028$$

$$\Rightarrow P(E^c) = 0.972$$

Μετά βρίσκουμε $P(E^c|B)$:

$$P(E^c|B) = 1 - P(E|B)$$

$$\Rightarrow P(E^c|B) = 1 - 0.03$$

$$\Rightarrow P(E^c|B) = 0.97$$

Τύπος Bayes για το συμπλήρωμα:

$$P(B|E^c) = \frac{P(E^c|B) \cdot P(B)}{P(E^c)}$$

$$\Rightarrow P(B|E^c) = \frac{0.97 \cdot 0.5}{0.972}$$

$$\Rightarrow P(B|E^c) = \frac{0.4850}{0.972}$$

$$\Rightarrow P(B|E^c) \approx 0.49897 (\approx 49.90\%)$$

Άσκηση

Σε μια πόλη 2% των κατοίκων πάσχουν από μια ασθένεια. Υπάρχει ένα διαγνωστικό τεστ που είναι θετικό στο 95% των ασθενών (ευαισθησία) και δίνει ψευδώς θετικό αποτέλεσμα στο 10% των υγιών (ψευδο-θετικότητα). Επιλέγουμε τυχαία έναν κάτοικο.

Να υπολογιστούν:

1. Η συνολική πιθανότητα το τεστ να βγει θετικό.
2. Η πιθανότητα να έχει την ασθένεια, δεδομένου ότι το τεστ είναι θετικό.
3. Η πιθανότητα να έχει την ασθένεια και να βγει το τεστ θετικό.
4. Ελέγξτε αν τα ενδεχόμενα «να έχει ασθένεια» και «να βγει θετικό το τεστ» είναι ανεξάρτητα.

Λύση

Ορισμοί ενδεχομένων

$D = \{\text{το άτομο έχει ασθένεια}\}$

$D^c = \{\text{το άτομο δεν έχει ασθένεια}\}$

$T = \{\text{το τεστ βγαίνει θετικό}\}$

Δεδομένα

$$P(D) = 0.02$$

$$P(D^c) = 1 - 0.02 = 0.98$$

$$P(T|D) = 0.95$$

$$P(T|D^c) = 0.10$$

1. Συνολική πιθανότητα θετικού τεστ
1. Τύπος (Νόμος Ολικής Πιθανότητας):

$$P(T) = P(D) \cdot P(T|D) + P(D^c) \cdot P(T|D^c)$$

$$\Rightarrow P(T) = 0.02 \cdot 0.95 + 0.98 \cdot 0.10$$

$$\Rightarrow P(T) = 0.117 = 11.7\%$$

2. Πιθανότητα να έχει ασθένεια, αν το τεστ είναι θετικό

Τύπος (Bayes):

$$P(D|T) = \frac{P(T|D) \cdot P(D)}{P(T)}$$

$$\Rightarrow P(D|T) = \frac{0.95 \cdot 0.02}{0.117}$$

$$\Rightarrow P(D|T) = 0.1624 = 16.24\%$$

3. Πιθανότητα να έχει ασθένεια και να βγει θετικό το τεστ

$$P(D \cap T) = P(D) \cdot P(T|D)$$

$$\Rightarrow P(D \cap T) = 0.02 \cdot 0.95$$

$$\Rightarrow P(D \cap T) = 0.019 = 1.9\%$$

4. Έλεγχος ανεξαρτησίας

Τα ενδεχόμενα είναι ανεξάρτητα αν:

$$P(D \cap T) = P(D) \cdot P(T)$$

$$\Rightarrow P(D \cap T) = P(D) \cdot P(T)$$

$$\Rightarrow P(D \cap T) = 0.02 \cdot 0.117$$

$$\Rightarrow P(D \cap T) = 0.00234$$

Σύγκριση: $0.019 \neq 0.00234$

Δεν είναι ανεξάρτητα

Μεταθέσεις- Διατάξεις -Συνδυασμοί

Μεταθέσεις

Μεταθέσεις είναι οι διαφορετικοί τρόποι με τους οποίους μπορούμε να τοποθετήσουμε όλα τα στοιχεία μιας ομάδας σε διαφορετικές θέσεις.

Μας ενδιαφέρει η σειρά και χρησιμοποιούμε όλα τα στοιχεία.

$$P_n = n!$$

n : ο αριθμός των αντικειμένων

$n!$: το γινόμενο όλων των φυσικών αριθμών από 1 μέχρι n , δηλαδή
 $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 1$

Παράδειγμα

Πόσες διαφορετικές σειρές μπορούμε να σχηματίσουμε με τα γράμματα Α, Β, Γ;

$$n=3$$

$$P_3 = 3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$$

Υπάρχουν 6 διαφορετικές μεταθέσεις.

Όταν υπάρχουν ίδια στοιχεία

Αν έχουμε επαναλαμβανόμενα στοιχεία, ο τύπος γίνεται:

$$P = \frac{n!}{n_1! n_2! n_3! \dots}$$

όπου $n_1, n_2, \dots$ είναι οι αριθμοί επαναλήψεων κάθε ίδιου στοιχείου.

Παράδειγμα

Πόσες διαφορετικές λέξεις σχηματίζονται από τη λέξη ANNA ;

$$P = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = \frac{24}{4} = 6$$

Δηλαδή, υπάρχουν 6 διαφορετικές μεταθέσεις της λέξης ANNA.

Διατάξεις

Διατάξεις είναι οι τρόποι με τους οποίους μπορούμε να επιλέξουμε μερικά στοιχεία από n , με σειρά.

Μας ενδιαφέρει η σειρά αλλά όχι όλα τα στοιχεία.

$$A_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

όπου:

n : το πλήθος όλων των στοιχείων

k : πόσα επιλέγουμε κάθε φορά

$n!$: παραγοντικό του n

Παράδειγμα

Από 5 άτομα, πόσες διαφορετικές τριάδες μπορούμε να σχηματίσουμε αν έχει σημασία η σειρά;

$$A_{5,3} = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{120}{2!} = 60$$

60 διαφορετικές διατάξεις.

Συνδυασμοί

Συνδυασμοί είναι οι τρόποι να επιλέξουμε μερικά στοιχεία από n , χωρίς να μας ενδιαφέρει η σειρά.

Δεν μας ενδιαφέρει η σειρά.

$$C_{n,k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

όπου:

n : πλήθος όλων των στοιχείων

k : πόσα επιλέγουμε κάθε φορά

Παράδειγμα

Από 5 άτομα, πόσες διαφορετικές επιτροπές 3 ατόμων μπορούμε να φτιάξουμε αν δεν έχει σημασία η σειρά;

$$C_{5,3} = \frac{5!}{3!2!} = \frac{120}{12} = 10$$

10 διαφορετικές επιτροπές.