

Μηχανική-Ρευστομηχανική



Κινηματική στο Χώρο (3 Διαστάσεις)

Η κίνηση ενός σώματος περιγράφεται πλήρως μέσω των διανυσματικών μεγεθών της θέσης, της ταχύτητας και της επιτάχυνσης.

Διάνυσμα Θέσης (r)

Προσδιορίζει τη θέση του σώματος σε ένα τρισδιάστατο σύστημα συντεταγμένων (x, y, z)

$$r = xi + yj + zk$$

- **Μέτρο (Απόσταση από την αρχή):** $|r| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Συμβολισμοί

r : Το διάνυσμα θέσης (ξεκινά από το $(0,0,0)$ και δείχνει το σώμα).

x, y, z : Οι συντεταγμένες του σώματος στους τρεις άξονες.

i, j, k : Τα **μοναδιαία διανύσματα**. Δείχνουν την κατεύθυνση των αξόνων x, y, z αντίστοιχα και έχουν μέτρο 1.

$|r|$: Το μέτρο (μήκος) του διανύσματος, δηλαδή η ευθύγραμμη απόσταση από την αρχή των αξόνων.

Στιγμιαία Ταχύτητα (u)

Ορίζεται ως ο ρυθμός μεταβολής του διανύσματος θέσης ως προς το χρόνο (παράγωγος).

$$u = \frac{dr}{dt} = u_x i + u_y j + u_z k$$

- **Συνιστώσες:** $u_x = \frac{dx}{dt}, u_y = \frac{dy}{dt}, u_z = \frac{dz}{dt}$
- **Μέτρο:** $|u| = \sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2}$

Συμβολισμοί

dt: Μια απειροελάχιστα μικρή χρονική στιγμή (μεταβολή χρόνου).

dr: Η πολύ μικρή μετατόπιση που έγινε στο χρόνο dt.

u_x, u_y, u_z : Οι ταχύτητες με τις οποίες κινείται το σώμα "παράλληλα" σε κάθε άξονα.

Στιγμιαία Επιτάχυνση (a)

Ορίζεται ως ο ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας ως προς το χρόνο.

$$a = \frac{du}{dt} = a_x i + a_y j + a_z k$$

- **Συνιστώσες:** $a_x = \frac{du_x}{dt}, a_y = \frac{du_y}{dt}, a_z = \frac{du_z}{dt}$
- **Μέτρο:** $|a| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$

a: Δείχνει πόσο γρήγορα αυξάνεται ή μειώνεται η ταχύτητα.



● Σχέσεις Παραγώγων και Ολοκληρωμάτων

- $r \rightarrow u \rightarrow a$ (παραγωγίζω)
- $a \rightarrow u \rightarrow r$ (ολοκληρώνω)

Στη φυσική, για να μεταβούμε από ένα μέγεθος σε άλλο, χρησιμοποιούμε τον απειροστικό λογισμό:

- **Παραγωγή ($\frac{d}{dt}$):** Χρησιμοποιείται όταν πηγαίνουμε από τη **Θέση** $\rightarrow$ **Ταχύτητα** $\rightarrow$ **Επιτάχυνση**.
- **Ολοκλήρωση ($\int$):** Χρησιμοποιείται για την αντίστροφη πορεία: **Επιτάχυνση** $\rightarrow$ **Ταχύτητα** $\rightarrow$ **Θέση**.

Ολοκληρώματα & Νόμοι

- $u = \frac{dx}{dt} \Rightarrow dx = u \cdot dt \Rightarrow \int_{x_0}^x dx = \int_0^t u dt \Rightarrow x - x_0 = u(t - 0) \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{u}t$
- $a = \frac{du}{dt} \Rightarrow du = a \cdot dt \Rightarrow \int_{u_0}^u du = \int_0^t a dt \Rightarrow u - u_0 = a(t - 0) \Rightarrow \mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \mathbf{a}t$

Δυναμική & Νόμοι του Νεύτωνα

1ος Νόμος (Αδράνεια): Αν η συνισταμένη των δυνάμεων είναι μηδέν ($\Sigma F = 0$), το σώμα παραμένει ακίνητο ή κινείται με σταθερή ταχύτητα (Ε.Ο.Κ.).

2ος Νόμος (Θεμελιώδης): Η συνισταμένη δύναμη ισούται με το γινόμενο της μάζας επί την επιτάχυνση: $\Sigma F = ma$.

3ος Νόμος (Δράση-Αντίδραση): Για κάθε δύναμη δράσης F_{12} υπάρχει μια αντίθετη δύναμη αντίδρασης F_{21} , $F_{12} = -F_{21}$.

Η Ενέργεια στη Μηχανική

1. Κινητική Ενέργεια (K ή T)

Ορισμός: Είναι η ενέργεια που κατέχει ένα σώμα λόγω της κίνησής του

- **Τύπος:** $K = \frac{1}{2}mu^2$
- **Μονάδα μέτρησης:** Joule (J) στο S.I.
- **Συμβολισμοί:**
 - m : Η μάζα του σώματος (kg).
 - u : Το μέτρο της ταχύτητας (m/s).

2. Δυναμική Ενέργεια (U ή V)

Ορισμός: Είναι η ενέργεια που έχει ένα σώμα λόγω της θέσης του σε ένα πεδίο δυνάμεων (π.χ. βαρυτικό).

- **Τύπος (Βαρυτική):** $U = mgh$
- **Συμβολισμοί:**
 - g : Η επιτάχυνση της βαρύτητας ($\approx 9,8 m/s^2$).
 - h : Το ύψος από ένα επίπεδο αναφοράς.

3. Μηχανική Ενέργεια ($E_{μηχ}$)

Ορισμός: Το άθροισμα της κινητικής και της δυναμικής ενέργειας ενός σώματος.

- **Τύπος:** $E_{μηχ} = K + U$
- **Αρχή Διατήρησης:** Αν ασκούνται μόνο συντηρητικές δυνάμεις (π.χ. βάρος), τότε η $E_{μηχ}$ παραμένει σταθερή ($E_{αρχ} = E_{τελ}$).

Έργο, Ισχύς και Θ.Μ.Κ.Ε

1. Έργο (W)

Το έργο εκφράζει τη μεταφορά ενέργειας μέσω μιας δύναμης που προκαλεί μετατόπιση. Η μονάδα μέτρησης στο S.I. είναι το **Joule (J)**.

- Σε ευθύγραμμη κίνηση:

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F dx$$

- Σε καμπυλόγραμμη κίνηση:

$$W = \int_c F \cdot dr$$

Συμβολισμοί:

- W : Έργο της δύναμης.
- F ή $\vec{F}$: Η δύναμη που ασκείται στο σώμα.
- x_1, x_2 : Η αρχική και η τελική θέση στον άξονα κίνησης.
- $d\vec{r}$: Το διάνυσμα της στοιχειώδους μετατόπισης πάνω στην καμπύλη c .

2. Ισχύς (P)

Η ισχύς ορίζεται ως ο ρυθμός με τον οποίο παράγεται έργο ή μεταφέρεται ενέργεια. Η μονάδα μέτρησης στο S.I. είναι το **Watt (W)**.

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{F \cdot dr}{dt} = F \cdot \frac{dr}{dt} = F \cdot v$$

Συμβολισμοί:

- P : Η ισχύς.
- $\frac{dW}{dt}$: Ο ρυθμός μεταβολής του έργου ως προς τον χρόνο.
- v : Η στιγμιαία ταχύτητα του σώματος.

3. Θεώρημα Έργου - Κινητικής Ενέργειας (Θ.Μ.Κ.Ε.)

Το συνολικό έργο όλων των δυνάμεων που ασκούνται σε ένα σώμα ισούται με τη μεταβολή της κινητικής του ενέργειας.

$$\sum W = \Delta K$$

$$\Rightarrow W_{ολ} = K_{τελ} - K_{αρχ}$$

Συμβολισμοί:

- $\sum W$ ή $W_{ολ}$: Το αλγεβρικό άθροισμα των έργων όλων των δυνάμεων.
- ΔK : Η μεταβολή της κινητικής ενέργειας.
- $K_{αρχ}, K_{τελ}$: Η αρχική και η τελική κινητική ενέργεια του σώματος αντίστοιχα.

Άσκηση

Ένα υλικό σημείο μάζας $m = 1 \text{ kg}$ δέχεται δύναμη $F(t) = -8 \cos 2t \cdot i + 8 \sin 2t \cdot j + 2 \cdot k$. Αν τη χρονική στιγμή $t = 0$ το σημείο Σ διέρχεται από το σημείο $A(2, 0, 3)$ με ταχύτητα $v_0 = -4j - 4k$:

α) Να βρεθεί η εξίσωση του διανύσματος μετατόπισης του Σ , $r(t)$.

β) Να βρεθούν οι χρονικές στιγμές τις οποίες:

i) η ταχύτητά του είναι κάθετη στο διάνυσμα θέσης του.

ii) το Σ απέχει την ελάχιστη απόσταση από την αρχή των αξόνων.

γ) Να υπολογιστεί το έργο της F στο χρονικό διάστημα $t = 0$ έως $t = 3 \text{ sec}$.

δ) Να προσδιοριστεί ο ρυθμός μεταβολής του έργου (ισχύς) της δύναμης F για τυχαίο χρόνο t .

Λύση

$$F(t) = -8 \cos 2t \cdot i + 8 \sin 2t \cdot j + 2 \cdot k$$

$$v_0 = -4j - 4k$$

α) Εύρεση $r(t)$

$$F = m \cdot a \Rightarrow a = \frac{F}{m}$$

$$a(t) = -8 \cos 2t \cdot i + 8 \sin 2t \cdot j + 2 \cdot k$$

$$a(t) = \frac{dv}{dt} \Rightarrow dv = a \cdot dt \Rightarrow \int_{v_0}^v dv = \int_0^t (-8 \cos 2t \cdot i + 8 \sin 2t \cdot j + 2 \cdot k) dt$$

$$v - (-4j - 4k) = [-4 \sin 2t \cdot i - 4 \cos 2t \cdot j + 2t \cdot k]_0^t$$

$$v - (-4j - 4k) = (-4 \sin 2t \cdot i - 4 \cos 2t \cdot j + 2t \cdot k) - (-4j)$$

$$v = -4 \sin 2t \cdot i - 4 \cos 2t \cdot j + 2t \cdot k - 4j + 4k - 4j$$

$$v(t) = -4 \sin 2t \cdot i - 4 \cos 2t \cdot j + (2t - 4) \cdot k$$

Τώρα για τη θέση $r(t)$:

$$v(t) = \frac{dr}{dt} \Rightarrow dr = v(t) \cdot dt$$

$$\int_{2i+0j+3k}^r dr = \int_0^t (-4 \sin 2t \cdot i - 4 \cos 2t \cdot j + (2t - 4) \cdot k) dt$$

$$r - (2i + 0j + 3k) = [2 \cos 2t \cdot i - 2 \sin 2t \cdot j + (t^2 - 4t) \cdot k]_0^t$$

$$r - (2i + 3k) = (2 \cos 2t \cdot i - 2 \sin 2t \cdot j + t^2 - 4t \cdot k) - (2i)$$

$$r(t) = 2 \cos 2t \cdot i - 2 \sin 2t \cdot j + (t^2 - 4t + 3) \cdot k$$

β) Χρονικές στιγμές

i) $v(t) \perp r(t) \Rightarrow v(t) \cdot r(t) = 0 \quad (-4 \sin 2t, -4 \cos 2t, 2t - 4) \cdot (2 \cos 2t, -2 \sin 2t, t^2 - 4t + 3) = 0$

$$-8 \sin 2t \cos 2t + 8 \cos 2t \sin 2t + (2t - 4)(t^2 - 4t + 3) = 0$$

$$2(t - 2)(t - 1)(t - 3) = 0$$

Άρα: $t = 1 \text{ sec}, t = 2 \text{ sec}, t = 3 \text{ sec}$

ii) $|r(t)| = \min$ Όταν $\frac{d|r(t)|}{dt} = 0$:

$$\frac{d}{dt} [(2 \cos 2t)^2 + (-2 \sin 2t)^2 + (t^2 - 4t + 3)^2]^{1/2} = 0$$

$$\frac{d}{dt} [4(\cos^2 2t + \sin^2 2t) + (t^2 - 4t + 3)^2]^{1/2} = 0$$

$$\frac{d}{dt} [4 + (t^2 - 4t + 3)^2]^{1/2} = 0$$

$$\frac{1}{2} [4 + (t^2 - 4t + 3)^2]^{-1/2} \cdot 2(t^2 - 4t + 3) \cdot (2t - 4) = 0$$

Ρίζες: $t = 1, t = 3$ ή $t = 2 \text{ sec}$ (που είναι το ελάχιστο).

γ) Έργο της F ($t = 0$ έως $t = 3$)

$$W = \int_{r(0)}^{r(3)} F \cdot dr = \int_0^3 (-8 \cos 2t, 8 \sin 2t, 2) \cdot (-4 \sin 2t, -4 \cos 2t, 2t - 4) dt$$

$$W = \int_0^3 (32 \sin 2t \cos 2t - 32 \sin 2t \cos 2t + 4t - 8) dt$$

$$W = \int_0^3 (4t - 8) dt = [2t^2 - 8t]_0^3 = (18 - 24) - 0 = -6 \text{ J}$$

δ) Ισχύς P

$$P = F \cdot v = (-8 \cos 2t, 8 \sin 2t, 2) \cdot (-4 \sin 2t, -4 \cos 2t, 2t - 4)$$

$$P = 32 \cos 2t \sin 2t - 32 \sin 2t \cos 2t + 2(2t - 4)$$

$$P = 4t - 8$$