

Μαθηματικά II



Θεωρία: Διπλά Ολοκληρώματα (Περίπτωση 1)

1. Ορισμός σε Ορθογώνιο Χωρίο

Όταν το χωρίο ολοκλήρωσης D είναι ένα ορθογώνιο, οι μεταβλητές x και y κυμαίνονται μεταξύ σταθερών ορίων:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$$

Σε αυτή την περίπτωση, το διπλό ολοκλήρωμα της συνάρτησης $f(x, y)$ πάνω στο D μπορεί να υπολογιστεί με δύο τρόπους (διαδοχική ολοκλήρωση), ανάλογα με τη σειρά που επιλέγουμε:

1. Ολοκλήρωση πρώτα ως προς y : $\int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx$
2. Ολοκλήρωση πρώτα ως προς x : $\int_c^d \left[\int_a^b f(x, y) dx \right] dy$

2. Εφαρμογή (Άσκηση)

Εκφώνηση: Να υπολογιστεί το διπλό ολοκλήρωμα $I = \iint_D (x^2y + y^3) dx dy$, όταν το χωρίο ολοκλήρωσης είναι το ορθογώνιο $D = [0, 1] \times [0, 2]$. (Σημείωση: Αυτό σημαίνει $0 \leq x \leq 1$ και $0 \leq y \leq 2$).

Αναλυτική Λύση:

Βήμα 1: Τοποθέτηση των ορίων Επιλέγουμε να ολοκληρώσουμε πρώτα ως προς y και μετά ως προς x :

$$I = \int_0^1 \left[\int_0^2 (x^2y + y^3) dy \right] dx$$

$$\text{Βήμα 2: Εσωτερική Ολοκλήρωση (ως προς } y) \implies I = \int_0^1 \left[\frac{1}{2}x^2y^2 + \frac{1}{4}y^4 \right]_0^2 dx$$

$$(\text{Εδώ αντικαθιστούμε το } y = 2 \text{ και το } y = 0 \text{ μέσα στην παρένθεση}): \implies I = \int_0^1 \left(\frac{1}{2}x^2 \cdot 2^2 + \frac{1}{4} \cdot 2^4 - 0 \right) dx \implies I = \int_0^1 (2x^2 + 4) dx$$

$$\text{Βήμα 3: Εξωτερική Ολοκλήρωση (ως προς } x) \implies I = \left[2 \frac{x^3}{3} + 4x \right]_0^1$$

$$(\text{Αντικαθιστούμε το } x = 1 \text{ και το } x = 0): \implies I = \left(\frac{2 \cdot 1^3}{3} + 4 \cdot 1 \right) \implies I = \frac{2}{3} + 4$$

$$\text{Τελικό Αποτέλεσμα: } \implies I = \frac{14}{3}$$

Θεωρία: Διπλά Ολοκληρώματα (Περίπτωση 2)

1. Ορισμός σε Γενικό Χωρίο

Όταν το χωρίο ολοκλήρωσης D δεν είναι ορθογώνιο, αλλά ορίζεται από δύο συναρτήσεις του x , τότε τα όρια για τη μεταβλητή y είναι συναρτήσεις:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$$

Ο τύπος του διπλού ολοκληρώματος σε αυτή την περίπτωση είναι:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \left[\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy \right] dx$$

2. Εφαρμογή (Άσκηση)

Εκφώνηση: Να υπολογιστεί το διπλό ολοκλήρωμα $I = \iint_D (4xy - y^3) dx dy$, όταν το χωρίο D ορίζεται από τις σχέσεις $0 \leq x \leq 1$ και $x^3 \leq y \leq \sqrt{x}$.

Αναλυτική Λύση:

Βήμα 1: Εσωτερική Ολοκλήρωση (ως προς y) Ολοκληρώνουμε τη συνάρτηση $4xy - y^3$ ως προς y , θεωρώντας το x σταθερό:

$$I = \int_0^1 \left[\int_{x^3}^{\sqrt{x}} (4xy - y^3) dy \right] dx$$

$$\implies I = \int_0^1 \left[2xy^2 - \frac{y^4}{4} \right]_{x^3}^{\sqrt{x}} dx$$

Βήμα 2: Αντικατάσταση Ορίων Αντικαθιστούμε το πάνω όριο ($\sqrt{x}$) και το κάτω όριο (x^3) στη θέση του y :

$$\Rightarrow I = \int_0^1 \left[\left(2x(\sqrt{x})^2 - \frac{(\sqrt{x})^4}{4} \right) - \left(2x(x^3)^2 - \frac{(x^3)^4}{4} \right) \right] dx$$

$$\Rightarrow I = \int_0^1 \left[\left(2x^2 - \frac{x^2}{4} \right) - \left(2x^7 - \frac{x^{12}}{4} \right) \right] dx$$

$$\Rightarrow I = \int_0^1 \left(\frac{7}{4}x^2 - 2x^7 + \frac{1}{4}x^{12} \right) dx$$

Βήμα 3: Εξωτερική Ολοκλήρωση (ως προς x) Ολοκληρώνουμε τώρα ως προς x από 0 έως 1:

$$\Rightarrow I = \left[\frac{7}{12}x^3 - \frac{2}{8}x^8 + \frac{1}{4 \cdot 13}x^{13} \right]_0^1$$

$$\Rightarrow I = \left[\frac{7}{12}x^3 - \frac{1}{4}x^8 + \frac{1}{52}x^{13} \right]_0^1$$

Βήμα 4: Τελικοί Υπολογισμοί Αντικαθιστώντας το $x = 1$:

$$\Rightarrow I = \frac{7}{12} - \frac{1}{4} + \frac{1}{52} = \frac{91 - 39 + 3}{156} = \frac{55}{156}$$

Θεωρία: Διπλά Ολοκληρώματα (Περίπτωση 3)

1. Ορισμός Χωρίου

Σε αυτή την περίπτωση, το χωρίο D ορίζεται από δύο σταθερά όρια για τη μεταβλητή y , ενώ η μεταβλητή x κυμαίνεται ανάμεσα σε δύο συναρτήσεις του y :

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq y \leq d, h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\}$$

Ο τύπος υπολογισμού είναι:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d \left[\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx \right] dy$$

Εκφώνηση: Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $I = \iint_D e^{x/y} dx dy$, όπου $D : 1 \leq y \leq 2$ και $y \leq x \leq y^3$.

Λύση:

Βήμα 1: Τοποθέτηση των ορίων ολοκλήρωσης

$$I = \int_1^2 \left[\int_y^{y^3} e^{x/y} dx \right] dy$$

Βήμα 2: Εσωτερική ολοκλήρωση (ως προς x) $\implies I = \int_1^2 [ye^{x/y}]_y^{y^3} dy$

(Αντικαθιστούμε τα όρια $x = y^3$ και $x = y$ μέσα στην αγκύλη): $\implies I = \int_1^2 (ye^{y^3/y} - ye^{y/y}) dy \implies I = \int_1^2 (ye^{y^2} - ye^1) dy$

Βήμα 3: Εξωτερική ολοκλήρωση (ως προς y) $\implies I = \left[\frac{1}{2}e^{y^2} - \frac{\epsilon}{2}y^2 \right]_1^2$

(Αντικαθιστούμε τα όρια $y = 2$ και $y = 1$): $\implies I = \left(\frac{1}{2}e^{2^2} - \frac{\epsilon}{2} \cdot 2^2 \right) - \left(\frac{1}{2}e^{1^2} - \frac{\epsilon}{2} \cdot 1^2 \right)$
 $\implies I = \frac{1}{2}e^4 - 2e - \left(\frac{\epsilon}{2} - \frac{\epsilon}{2} \right)$

Τελικό Αποτέλεσμα: $\implies I = \frac{1}{2}e^4 - 2e$

Υπολογισμός Εμβαδού με Διπλό Ολοκλήρωμα

Άσκηση

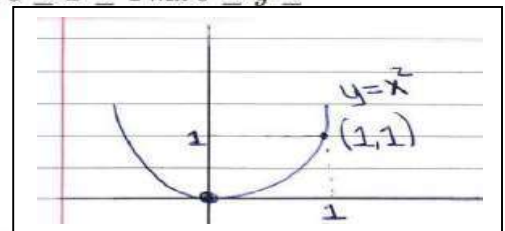
Να υπολογιστεί το εμβαδόν της περιοχής που περικλείεται ανάμεσα στις ευθείες $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$ και την καμπύλη $y = x^2$.

Λύση

Το εμβαδόν E ενός χωρίου D δίνεται από τον τύπο: $E = \iint_D dx dy$.

Βήμα 1: Τοποθέτηση των ορίων Με βάση το σχήμα, τα όρια είναι $0 \leq x \leq 1$ και $0 \leq y \leq x^2$:

$$E = \int_0^1 \left[\int_0^{x^2} dy \right] dx$$



Βήμα 2: Εσωτερική Ολοκλήρωση (ως προς y) $\implies E = \int_0^1 [y]_0^{x^2} dx \implies E = \int_0^1 x^2 dx$

Βήμα 3: Εξωτερική Ολοκλήρωση (ως προς x) $\implies E = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1$

Βήμα 4: Αντικατάσταση ορίων $\implies E = \frac{1^3}{3} - 0 = \frac{1}{3}$

Άσκηση

Να υπολογιστεί το εμβαδόν της περιοχής R που περικλείεται από τις καμπύλες:

- $y = x^2$ (παραβολή με άνοιγμα προς τα πάνω)
- $y = 2 - x^2$ (παραβολή με άνοιγμα προς τα κάτω)

Λύση

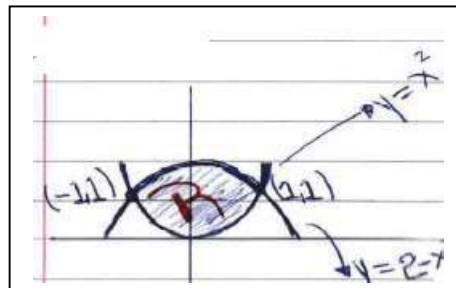
Για να ορίσουμε τα όρια ολοκλήρωσης, πρέπει πρώτα να βρούμε πού τέμνονται οι δύο καμπύλες:

$$x^2 = 2 - x^2 \implies 2x^2 = 2 \implies x^2 = 1 \implies x = \pm 1$$

- Για $x = 1$, το $y = 1^2 = 1$. Άρα σημείο τομής το $(1, 1)$.
- Για $x = -1$, το $y = (-1)^2 = 1$. Άρα σημείο τομής το $(-1, 1)$.

Στο σχήμα βλέπουμε ότι η περιοχή R περιορίζεται:

- **Αριστερά και δεξιά:** από $x = -1$ έως $x = 1$.
- **Κάτω:** από την καμπύλη $y = x^2$.
- **Πάνω:** από την καμπύλη $y = 2 - x^2$.



Το εμβαδόν E δίνεται από το διπλό ολοκλήρωμα:

$$E = \iint_R dx dy$$

Βήμα 1: Τοποθέτηση ορίων

$$\Rightarrow E = \int_{-1}^1 \left[\int_{x^2}^{2-x^2} dy \right] dx$$

Βήμα 2: Εσωτερική ολοκλήρωση (ως προς y)

$$\Rightarrow E = \int_{-1}^1 [y]_{x^2}^{2-x^2} dx$$

$$\Rightarrow E = \int_{-1}^1 (2 - x^2 - x^2) dx$$

$$\Rightarrow E = \int_{-1}^1 (2 - 2x^2) dx$$

Βήμα 3: Εξωτερική ολοκλήρωση (ως προς x)

$$\Rightarrow E = \left[2x - 2\frac{x^3}{3} \right]_{-1}^1$$

Βήμα 4: Αντικατάσταση ορίων

$$\Rightarrow E = \left(2(1) - \frac{2}{3}(1)^3 \right) - \left(2(-1) - \frac{2}{3}(-1)^3 \right)$$

$$\Rightarrow E = \left(2 - \frac{2}{3} \right) - \left(-2 + \frac{2}{3} \right)$$

$$\Rightarrow E = \frac{4}{3} - \left(-\frac{4}{3} \right) = \frac{4}{3} + \frac{4}{3}$$

Τελικό Αποτέλεσμα:

$$\Rightarrow E = \frac{8}{3}$$

Αλλαγή Μεταβλητών στα Διπλά Ολοκληρώματα

1ο Βήμα: Επιλογή Μετασχηματισμού Επιλέγουμε τις κατάλληλες συναρτήσεις μετασχηματισμού που συνδέουν τις παλιές μεταβλητές (x, y) με τις νέες (u, v) :

- $x = x(u, v)$
- $y = y(u, v)$

2ο Βήμα: Υπολογισμός της Ιακωβιανής Ορίζουσας Υπολογίζουμε την ορίζουσα των μερικών παραγώγων (ιακωβιανή), η οποία μας δείχνει πώς μεταβάλλεται το στοιχείο εμβαδού:

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

Επίσης, αντικαθιστούμε τις μεταβλητές στη συνάρτηση: $g(u, v) = f(x(u, v), y(u, v))$.

3ο Βήμα: Σχεδιασμός του Νέου Χωρίου Σχεδιάζουμε στο επίπεδο με άξονες u και v τη νέα εικόνα του χωρίου ολοκλήρωσης, όπως αυτή προκύπτει από τον μετασχηματισμό.

4ο Βήμα: Εφαρμογή του Τύπου Εφαρμόζουμε την τελική σχέση για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος:

$$\iint_D f(x, y) \, dx dy = \iint_{D'} g(u, v) \cdot \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| \, du dv$$

Σημαντική Σημείωση

Το σύμβολο $\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right|$ στον τελικό τύπο αναφέρεται στην **απόλυτη τιμή** της Ιακωβιανής ορίζουσας.