

Μαθηματικά Ι



Ολοκληρώματα

Αόριστο Ολοκλήρωμα:

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

όπου $F'(x)=f(x)$ και C σταθερά ολοκλήρωσης.

Ορισμένο Ολοκλήρωμα:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

με συγκεκριμένα άκρα ολοκλήρωσης

! Βασικοί τύποι ολοκληρωμάτων

1. Ολοκλήρωμα σταθερής συνάρτησης

Αν $f(x)=c$, όπου c είναι σταθερός αριθμός, τότε:

$$\int c dx = cx + C$$

2. Ολοκλήρωμα της συνάρτησης $f(x)=x$

$$\int x dx = \frac{x^2}{2} + C$$

3. Ολοκλήρωμα δύναμης του x

Αν $f(x)=x^n$, τότε:

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad (n \neq -1)$$

4. Ολοκλήρωμα εκθετικής συνάρτησης

$$\int e^x dx = e^x + C$$
$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad (a > 0, a \neq 1)$$

5. Ολοκλήρωμα λογαριθμικής συνάρτησης

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C$$

6. Ολοκλήρωμα τριγωνομετρικών συναρτήσεων

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$
$$\int \cos x dx = \sin x + C$$
$$\int \sec^2 x dx = \tan x + C$$
$$\int \csc^2 x dx = -\cot x + C$$

7. Ολοκλήρωμα αντίστροφων τριγωνομετρικών συναρτήσεων

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$$
$$\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arccos x + C$$

Άσκηση

Βρείτε τα αόριστα ολοκλήρωματα

$$1. \int (3x^2 - 4x + 5) dx$$

$$2. \int \sqrt{x} dx$$

$$3. \int \left(\frac{1-x}{x} \right)^2 dx$$

Λύση

$$\begin{aligned} 1. \int (3x^2 - 4x + 5) dx \\ &= \int 3x^2 dx - \int 4x dx + \int 5 dx \\ &= 3 \int x^2 dx - 4 \int x dx + \int 5 dx \\ &= 3 \left[\frac{x^3}{3} \right] - 4 \left[\frac{x^2}{2} \right] + 5x + C \\ &= x^3 - 2x^2 + 5x + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \int \sqrt{x} dx \\ &= \int x^{\frac{1}{2}} dx \\ &= \left[\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} \right] + C \\ &= \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C \\ &= \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3. \int \left(\frac{1-x}{x} \right)^2 dx \\ &= \int \frac{(1-x)^2}{x^2} dx \\ &= \int \frac{1-2x+x^2}{x^2} dx \\ &= \int \frac{1}{x^2} dx + \int \frac{-2x}{x^2} dx + \int \frac{x^2}{x^2} dx \end{aligned}$$

$$= \int x^{-2} dx - 2 \int \frac{1}{x} dx + \int 1 dx$$

$$= \left[\frac{x^{-2+1}}{-2+1} \right] - 2x[\ln x] + [x] + C$$

$$= \frac{x^{-1}}{-1} - 2x \ln x + x + C$$

$$= -\frac{1}{x} - 2x \ln x + x + C$$

Μέθοδοι Ολοκλήρωσης



Μέθοδος Αντικατάστασης

Αν το ολοκλήρωμα έχει τη μορφή $\int f(g(x)) g'(x) dx$ τότε με την αντικατάσταση $u=g(x)$ το ολοκλήρωμα γίνεται απλούστερο: $\int f(u) du$

Η αντικατάσταση είναι μια μέθοδος που χρησιμοποιούμε για να απλοποιήσουμε δύσκολα ολοκληρώματα. Όταν βλέπουμε μια σύνθετη συνάρτηση (π.χ. κάτι μέσα σε παρένθεση, σε ρίζα ή εκθετικό), προσπαθούμε να την αντικαταστήσουμε με μια πιο απλή μεταβλητή u .

Βήματα

Βήμα 1: Εντόπισε το «μέσα»

Κοίτα προσεκτικά το ολοκλήρωμα. Συνήθως υπάρχει μια συνάρτηση μέσα σε άλλη. Αυτή θα είναι το υποψήφιο u .

Βήμα 2: Υπολόγισε το du

Παίρνεις την παράγωγο του u :

$$du=g'(x) dx$$

Βήμα 3: Κάνε την αντικατάσταση

Αντικαθιστάς κάθε $g(x)$ με u , και κάθε dx με την αντίστοιχη μορφή του από το du .

Αυτό σου δείχνει ποια μορφή πρέπει να υπάρχει στο ολοκλήρωμα.

Βήμα 4: Ολοκλήρωσε ως προς u

Τώρα έχεις ένα πολύ πιο απλό ολοκλήρωμα

Βήμα 5: Επαναφορά στο x

Αντικαθιστάς ξανά το u με το αρχικό που είχες θέσει

Άσκηση

Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$I = \int 2x\sqrt{1+x^2} dx.$$



Λύση

$$\text{Θέτω } u=1+x^2$$

Βήμα 1 : Επιλογή u. Βλέπω το εσωτερικό της ρίζας $1+x^2$.

$$du=2x dx$$

$$\Rightarrow dx = \frac{du}{2x}$$

Βήμα 2 :Υπολογισμός du και λύνω ως προς dx

$$\int 2x\sqrt{1+x^2} dx$$

Βήμα 3 :Αντικατάσταση

$$= \int \cancel{2x} \sqrt{u} \frac{du}{\cancel{2x}}$$

$$= \int \sqrt{u} du$$

Βήμα 4:Ολοκλήρωση ως προς u.

$$= \int u^{\frac{1}{2}} du$$

$$= \left[\frac{u^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} \right] + C$$

$$= \left[\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right] + C$$

$$= \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} + C$$

$$= \frac{2}{3} (1+x^2)^{\frac{3}{2}} + C$$

Βήμα 5:Επαναφορά στο x Αντικαθιστώ $u=1+x^2$