

● Ολοκλήρωση



Σημειώσεις - Λυμένα θέματα

e-students.gr

☎ 698 93 94 741

Αόριστο

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

Ορισμένο

$$\int_a^b f(x) dx = \Phi(x) \Big|_a^b = \Phi(b) - \Phi(a)$$

● Βασικά ολοκληρώματα

$$\int 0 dx = C$$

$$\int 1 dx = x + C$$

$$\int x^v dx = \frac{x^{v+1}}{v+1} + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$



Σημειώσεις - Λυμένα θέματα

e-students.gr

☎ 698 93 94 741

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$$



Σημειώσεις - Λογμένα Θέματα

e-students.gr

☎ 698 93 94 741

$$\int -\frac{1}{\sin^2 x} dx = \cot x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$$

$$\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arccos x + C$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C$$

$$\int -\frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arccot} x + C$$



Σημειώσεις - Λογμένα Θέματα

e-students.gr

☎ 698 93 94 741

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx = \operatorname{arcsec} x + C$$

$$\int -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx = \operatorname{arccsc} x + C$$

$$\int \cosh x dx = \sinh x + C$$

$$\int \sinh x dx = \cosh x + C$$

$$\int \frac{1}{\cosh^2 x} dx = \tanh x + C$$



Σημειώσεις - Λυμένα Θέματα

e-students.gr

☎ 698 93 94 741

$$\int -\frac{1}{\sinh^2 x} dx = \coth x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} dx = \operatorname{arcsinh} x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} dx = \operatorname{arccosh} x + C$$

$$\int \frac{1}{1-x^2} dx = \operatorname{arctanh} x + C, |x| < 1$$

$$\int -\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}} dx = \operatorname{arcsech} x + C$$

$$\int -\frac{1}{|x|\sqrt{1+x^2}} dx = \operatorname{arccsch} x + C$$



Σημειώσεις - Λυμένα Θέματα

e-students.gr

☎ 698 93 94 741

Εφαρμογή



Σημειώσεις - Λογμένα Θέματα

e-students.gr

698 93 94 741

Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα

i) $\int \sqrt{x} dx$

ii) $\int \left(\frac{1-x}{x} \right)^2 dx$



Σημειώσεις - Λογμένα Θέματα

e-students.gr

698 93 94 741

Λύση

$$\begin{aligned} \text{i) } \int \sqrt{x} dx &= \int x^{1/2} dx = \frac{x^{1/2+1}}{1/2+1} + C \\ &= \frac{2}{3} x^{3/2} + C \end{aligned}$$

$$\text{ii) } \int \left(\frac{1-x}{x} \right)^2 dx = \int \frac{(1-x)^2}{x^2} dx$$

$$\int \frac{1-2x+x^2}{x^2} dx = \int \frac{1}{x^2} dx - \int \frac{2x}{x^2} dx + \int \frac{x^2}{x^2} dx$$

$$= \int \frac{1}{x^2} dx - \int \frac{2}{x} dx + \int dx$$

$$= -\frac{1}{x} - 2 \ln|x| + x + C$$

● Μέθοδοι Ολοκλήρωσης

1) Παραγοντική Ολοκλήρωση

ΤΥΠΟΣ

$$\int f'(x) \cdot g(x) dx = f(x) \cdot g(x) - \int f(x) g'(x) dx$$

Π.Χ ①

$$\int \ln x dx = ?$$

$$\int \ln x dx = \int x' \ln x dx$$

$$\stackrel{\text{Π.Ο}}{=} x \ln x - \int x (\ln x)' dx$$

$$= x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx$$

$$= x \ln x - \int dx$$

$$= x \ln x + C$$

Π.Χ ②

$$\int e^x \cdot x dx = ?$$

$$\int (e^x)' \cdot x dx = [e^x \cdot x] - \int e^x (x)' dx = e^x \cdot x - \int e^x dx = e^x \cdot x - e^x + C$$



Σημειώσεις - Λυμένα Θέματα

e-students.gr

© 698 93 94 741



Σημειώσεις - Λυμένα Θέματα

e-students.gr

© 698 93 94 741

2) Μέθοδος Αντικατάστασης

1^η Θεωρώ κατάλληλη αντικατάσταση $u = \phi(x)$ όπου u είναι η νέα μεταβλητή

2^η Διαφορίζω τη σχέση $u = \phi(x)$

3^η Γάνω αντικατάσταση στο ολοκλήρωμα που δίνεται

Π.χ ①

$$I = \int \frac{\ln x}{x} dx = ?$$

1^η Θεωρώ $u = \ln x$

2^η $du = \frac{1}{x} dx = \frac{dx}{x} = x du$

3^η
$$I = \int \frac{\ln x}{x} dx = \int \frac{u}{x} \cdot x du$$
$$= \int u du = \frac{u^2}{2} + C = \frac{(\ln x)^2}{2} + C$$

Π.χ ②

$$I = \int \sqrt{x+x\sqrt{x}} dx = ?$$



$$I = \int \sqrt{x(1+\sqrt{x})} dx$$

→ ΠΟΛΙΝΟΣ ΤΡΑΠΕΖΟΥΝΤΑΣ
ΤΟ Χ.

$$I = \int \sqrt{x} \cdot \sqrt{1+\sqrt{x}} dx$$

→ ΣΙΝΤΑ ΤΑ ΟΙΩΣ
 $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$

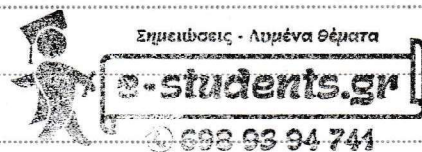
ΘΕΤΩ

$$u = 1 + \sqrt{x}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{x} &= u - 1 \\ x &= (u - 1)^2 \end{aligned}$$

$$du = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$$

$$dx = 2\sqrt{x} du$$



$$I = \int \sqrt{x} \cdot \sqrt{1+\sqrt{x}} dx = \int \sqrt{x} \cdot \sqrt{u} \cdot 2\sqrt{x} du$$

$$= 2 \int \sqrt{x} \cdot \sqrt{u} du = 2 \int (u-1)^2 \cdot u^{1/2} du$$

$$= 2 \int (u^2 - 2u + 1) u^{1/2} du = 2 \int (u^{5/2} - 2u^{3/2} + u^{1/2}) du$$

$$= 2 \int (u^{5/2} - 2u^{3/2} + u^{1/2}) du$$



Εμπειρίες - Αμύενα Θέματα

e-students.gr

© 698 93 94 741

$$= 2 \left[\int u^{5/2} du - 2 \int u^{3/2} du + \int u^{1/2} du \right]$$

$$= 2 \left[\frac{u^{5/2+1}}{5/2+1} - 2 \frac{u^{3/2+1}}{3/2+1} + \frac{u^{1/2+1}}{1/2+1} \right] + C$$

$$= 2 \left[\frac{u^{7/2}}{7/2} - 2 \frac{u^{5/2}}{5/2} + \frac{u^{3/2}}{3/2} \right] + C$$

$$= 2 \left[\frac{2}{7} u^{7/2} - \frac{4}{5} u^{5/2} + \frac{2}{3} u^{3/2} \right] + C$$

$$= 2 \left[\frac{2}{7} (1+\sqrt{x})^{7/2} - \frac{4}{5} (1+\sqrt{x})^{5/2} + \frac{2}{3} (1+\sqrt{x})^{3/2} \right] + C$$



Εμπειρίες - Αμύενα Θέματα

e-students.gr

© 698 93 94 741

3) Διαμετάθεση ορθής συ- νάρτησης



Εμπειρίες - Αμείβοντάς σε

e-students.gr

© 698 93 94 741

(ανάθεση σε απλά υλάσματα)

Εφαρμόζουμε ως ακολουθία:

1^η Ο βαθμός του τριωνύμου $P(x)$ να είναι μικρότερος από τον βαθμό του τριωνύμου $Q(x)$

$$\frac{P(x)}{Q(x)}$$

2^η Παραγοντοποιούμε τον παρανο-
μαστή $Q(x)$

3^η Σπάμε τα υλάσματα σε
απλά υλάσματα



Εμπειρίες - Αμείβοντάς σε

e-students.gr

© 698 93 94 741

1^η περίπτωση: $\frac{P(x) - P(x)}{Q(x) = (x-x_1)(x-x_2)}$

$$= \frac{A}{x-x_1} + \frac{B}{x-x_2}$$

2^η περίπτωση: $\frac{P(x) - P(x)}{Q(x) = (x-x_1)^m} = \frac{A}{x-x_1} + \frac{B}{(x-x_1)^2} + \dots + \frac{\Gamma}{(x-x_1)^m}$

3^η ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ : $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{ax^2+bx+c} = \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$



Στη περίπτωση που ο βαθμός του πολωνομίου $P(x)$ είναι μεγαλύτερος από το $Q(x)$ κάνουμε την διαίρεση.

Π.Χ ①

$$\int \frac{1}{x^2-4} dx = ?$$



$$\int \frac{1}{x^2-4} dx = \int \frac{1}{(x-2)(x+2)} dx$$

ΑΝΤΙΘΕΤΟ

$$= \int \left(\frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2} \right) dx$$

$$A = ?$$

$$B = ?$$

$$\textcircled{2} \int \left(\frac{2/4}{x-2} + \frac{(-2/4)}{x+2} \right) dx = \int \frac{2/4}{x-2} dx - \int \frac{2/4}{x+2} dx$$

$$\textcircled{3} \int \frac{2/4}{x-2} dx - \int \frac{2/4}{x+2} dx$$

$$= \frac{1}{4} \int \frac{1}{x-2} dx - \frac{1}{4} \int \frac{1}{x+2} dx = \frac{1}{4} \ln|x-2| - \frac{1}{4} \ln|x+2| + C$$

$$\frac{1}{(x-2)(x+2)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2}$$



$$\Rightarrow \frac{1}{(x-2)(x+2)} = \frac{A(x+2) + B(x-2)}{(x-2)(x+2)}$$

$$\Rightarrow 1 = Ax + 2A + Bx - 2B$$

$$\Rightarrow 1 = (A+B)x + 2A - 2B$$

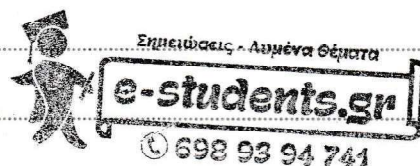
$$1 = 2A - 2B \quad \textcircled{1} \Rightarrow 1 = 2 \cdot A - 2 \cdot (-A)$$

$$\Rightarrow 1 = 2A + 2A \Rightarrow 1 = 4A$$

$$0 = A + B \Rightarrow A = -B \quad \textcircled{1}$$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{4} \quad \textcircled{2}$$

$$\Rightarrow B = -\frac{1}{4} \quad \textcircled{3}$$



II.x ②

$$\int \frac{1}{x^3+x} dx = ?$$



Εμπειρία - Απλότα Θέματα

e-students.gr

© 692 93 94 744

$$\frac{1}{x^3+x} = \frac{1}{x(x^2+1)}$$

1^η & 3^η ΤΕQ.

$$\Rightarrow \frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{A(x^2+1) + (Bx+C)x}{x(x^2+1)}$$

$$\Rightarrow 1 = Ax^2 + A + Bx^2 + Cx$$

$$\Rightarrow 1 = (A+B)x^2 + Cx + A$$

$$\Rightarrow \boxed{A=1}$$
$$\boxed{C=0}$$

$$A+B=0 \Rightarrow A=-B \Rightarrow \boxed{B=-1}$$



Εμπειρία - Απλότα Θέματα

e-students.gr

© 692 93 94 744

$$\int \frac{1}{x^2+x} dx = \int \left(\frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} \right) dx$$

$$= \int \frac{A}{x} dx + \int \frac{Bx+C}{x^2+1} dx$$



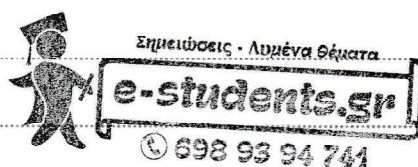
$$= \int \frac{1}{x} dx + \int \frac{-1x+0}{x^2+1} dx$$

$$= \int \frac{1}{x} dx + \int \frac{-x}{x^2+1} dx$$

$$= \int \frac{1}{x} dx - \int \frac{x}{x^2+1} dx$$

$$\textcircled{1} = \ln|x| - \frac{1}{2} \ln|x^2+1| + C$$

$$\int \frac{x}{x^2+1} dx = ?$$



$$\text{Θέτω } u = x^2+1$$

$$du = 2x dx \Rightarrow dx = \frac{du}{2x}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{x^2+1} dx &= \int \frac{x}{u} \cdot \frac{1}{2x} du = \frac{1}{2} \int \frac{1}{u} du = \frac{1}{2} \ln|u| \\ &= \frac{1}{2} \ln|x^2+1| \textcircled{1} \end{aligned}$$

● Ορισμένο Ολοκλήρωμα

$$I(f) = \int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Παρατηρήσεις: $\int_a^a f(x) dx = 0$

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$



Σημειώσεις - Λυμένα θέματα

e-students.gr

© 698 93 94 741

Π.Χ. ①

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 e^{-3x} dx &= \left[-\frac{1}{3} e^{-3x} \right]_{-1}^1 = -\frac{1}{3} (e^{-3} - e^3) \\ &= -\frac{1}{3} (e^{-3} - e^3) \end{aligned}$$

Π.Χ. ②

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = ?$$

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \int_0^1 \frac{1}{x^{1/2}} dx = \int_0^1 x^{-1/2} dx$$



Σημειώσεις - Λυμένα θέματα

e-students.gr

© 698 93 94 741

$$= \left[\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} \right]_0^1$$

$$= \frac{1^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} - \frac{0^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} \quad \text{DO}$$

$$= \frac{1^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} - 2 \cdot 1 = 2.$$

Π. x ③

$$I = \int_0^2 \frac{1}{x-2} dx = ?$$

$$\int_0^2 \frac{1}{x-2} dx \stackrel{\textcircled{12}}{=} \stackrel{\textcircled{34}}{=}$$

$$\int_{-2}^0 \frac{1}{u} du = [\ln|u|]_{-2}^0 = -\infty$$

ΘΕΤΩ $u = x - 2$ ①

$du = dx$ ②

για $x=0$ $u = 0 - 2 \Rightarrow u = -2$ ③

για $x=2$ $u = 2 - 2 \Rightarrow u = 0$ ④

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} (\ln|x|) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln|x|) = -\infty$$

