

Μαθηματικά -Στατιστική



Παράγωγος



Γεωμετρική ερμηνεία: Η παράγωγος μιας συνάρτησης f σε ένα σημείο x_0 δείχνει πόσο “απότομα” αλλάζει η συνάρτηση εκεί. Γεωμετρικά, εκφράζει την κλίση της εφαπτομένης ευθείας της γραφικής παράστασης στο σημείο $(x_0, f(x_0))$.

Φυσική ερμηνεία: Στη Φυσική, η παράγωγος δείχνει το ρυθμό μεταβολής ενός μεγέθους ως προς ένα άλλο. Για παράδειγμα: Αν $x(t)$ είναι η θέση ενός σώματος, τότε η παράγωγος της θέσης ως προς τον χρόνο είναι η ταχύτητα του σώματος, δηλαδή πόσο αλλάζει η θέση ανά μονάδα χρόνου.

Ορισμός παραγώγου

Η παράγωγος της f στο σημείο x_0 ορίζεται ως το όριο:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Αν το όριο αυτό υπάρχει, λέμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 .

Συμβολισμοί της παραγώγου

Η παράγωγος μπορεί να γραφτεί με διάφορους ισοδύναμους τρόπους:

$$f'(x), \quad f'(x_0), \quad y', \quad \frac{dy}{dx}, \quad \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_0}$$

$f'(x) \rightarrow$ Είναι ο πιο συνηθισμένος τρόπος γραφής.

$f'(x_0) \rightarrow$ Δείχνει την τιμή της παραγώγου στο σημείο x_0 .

$y' \rightarrow$ Χρησιμοποιείται όταν η συνάρτηση δίνεται ως $y=f(x)$.

$\frac{dy}{dx} \rightarrow$ Παράγωγος του y ως προς το x . Δείχνει ρητά ότι η παράγωγος παίρνεται ως προς το x .

$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_0} \rightarrow$ η παράγωγος του y ως προς το x , υπολογισμένη στο x μηδέν. Δηλώνει συγκεκριμένο σημείο υπολογισμού.

Παράγωγοι Συναρτήσεων

! Βασικοί τύποι παραγώγων

1. Παράγωγος σταθερής συνάρτησης

Αν $f(x)=c$, όπου c είναι σταθερός αριθμός, τότε:

$$f'(x) = 0$$

2. Παράγωγος της συνάρτησης $f(x)=x$

$$f'(x) = 1$$

3. Παράγωγος δύναμης του x

Αν $f(x)=x^n$, τότε:

$$f'(x) = n x^{n-1}$$

4. Παράγωγος εκθετικής συνάρτησης

$$(e^x)' = e^x$$

$$(a^x)' = a^x \ln a$$

5. Παράγωγος λογαριθμικής συνάρτησης

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

6. Παράγωγοι τριγωνομετρικών συναρτήσεων

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

7. Παράγωγοι αντίστροφων τριγωνομετρικών συναρτήσεων

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

! Κανόνες παραγώγισης

1. Κανόνας σταθερού πολλαπλασίου

Αν $f(x) = c \cdot g(x)$, τότε:

$$f'(x) = c \cdot g'(x)$$

Παράδειγμα:

Να βρεθεί η παράγωγος της $f(x) = 5x^3$

$$f'(x) = (5x^3)' = 5(x^3)' = 5 \cdot 3 \cdot x^2$$

2. Κανόνας αθροίσματος ή διαφοράς

Αν $f(x) = g(x) \pm h(x)$, τότε:

$$f'(x) = g'(x) \pm h'(x)$$

Παράδειγμα:

Να βρεθεί η παράγωγος της $f(x) = x^3 + 2x^2 - 5x + 7$

$$f'(x) = (x^3 + 2x^2 - 5x + 7)' = (x^3)' + (2x^2)' - (5x)' + (7)'$$

$$= (x^3)' + 2(x^2)' - 5(x)' + (7)' = 3x^2 + 2 \cdot 2 \cdot x - 5 \cdot 1 + 0$$

$$\Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 4x - 5$$

3. Κανόνας γινομένου

Αν $f(x) = g(x) \cdot h(x)$, τότε:

$$f'(x) = g'(x) h(x) + g(x) h'(x)$$

Παράδειγμα:

Να βρεθεί η παράγωγος της $f(x) = x^2 \sin x$

$$f'(x) = (x^2 \sin x)' = (x^2)' \cdot (\sin x) + (x^2) \cdot (\sin x)'$$

$$\Rightarrow f'(x) = 2x \cdot \sin x + x^2 \cdot \cos x$$

4. Κανόνας πηλίκου

Αν $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$, τότε:

$$f'(x) = \frac{g'(x)h(x) - g(x)h'(x)}{[h(x)]^2}$$

Παράδειγμα:

Να βρεθεί η παράγωγος της $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x - 1}$

$$f'(x) = \left(\frac{x^2 + 1}{x - 1} \right)' = \frac{[(x^2 + 1)'(x - 1) - (x^2 + 1)(x - 1)']}{(x - 1)^2}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{[2x^2 - 2x - x^2 - 1]}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x - 1}{(x-1)^2}$$

5. Κανόνας αλυσίδας (σύνθετη συνάρτηση)

Αν $f(x) = g(h(x))$, τότε:

Παράδειγμα

$$f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x)$$

Αν $f(x) = (3x+2)^4$, τότε με τον κανόνα αλυσίδας:

$$f'(x) = ((3x+2)^4)' = 4(3x+2)^3 \cdot (3x+2)'$$

$$\Rightarrow f'(x) = 4(3x+2)^3 \cdot (3)$$

$$\Rightarrow f'(x) = 12(3x+2)^3$$

Άσκηση

Να υπολογισθεί η παράγωγος $\frac{dy}{dx}$
της συνάρτησης

$$y = \sqrt[3]{x} + \sqrt[5]{x}$$

Λύση

$$\begin{aligned}
 \frac{dy}{dx} &= \frac{d(\sqrt[3]{x} + \sqrt[5]{x})}{dx} \\
 &= \frac{d(\sqrt[3]{x})}{dx} + \frac{d(\sqrt[5]{x})}{dx} \\
 &= \frac{d(x^{1/3})}{dx} + \frac{d(x^{1/5})}{dx} \\
 &= \frac{1}{3}x^{1/3-1} + \frac{1}{5}x^{1/5-1} \\
 \Rightarrow \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{3}x^{-2/3} + \frac{1}{5}x^{-4/5}
 \end{aligned}$$

Άσκηση

Να βρεθεί η παράγωγος $\frac{dy}{dx}$
της συνάρτησης

1. $y = \sin 2x$

2. $y = \sin^2 x$

Λύση

i) Για $y = \sin 2x$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(\sin 2x)}{dx} = \cos 2x \cdot \frac{d(2x)}{dx} = 2 \cos 2x$$

ii) Για $y = \sin^2 x$:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{d(\sin^2 x)}{dx} = \frac{d((\sin x)^2)}{dx} \\ &= 2 \sin x \cdot \frac{d(\sin x)}{dx} = 2 \sin x \cos x = \sin 2x \end{aligned}$$

Εισαγωγή στη Στατιστική



- Στατιστική: Επιστήμη που ασχολείται με τη συλλογή, οργάνωση, παρουσίαση, ανάλυση και ερμηνεία δεδομένων.
- Δεδομένα: Οι πληροφορίες που συγκεντρώνονται για μελέτη
- Πληθυσμός (Population): Το σύνολο όλων των στοιχείων που μελετάμε (π.χ. όλοι οι μαθητές ενός σχολείου).
- Δείγμα (Sample): Ένα υποσύνολο του πληθυσμού, που επιλέγεται για να μελετηθεί πιο εύκολα.
- Μεταβλητή (Variable): Ένα χαρακτηριστικό που μπορεί να πάρει διαφορετικές τιμές (π.χ. ύψος, ηλικία, βάρος).

- Οι μεταβλητές χωρίζονται σε:

1. Ποιοτικές (Qualitative): Δεν μετρώνται αριθμητικά (π.χ. φύλο, χρώμα ματιών).
2. Ποσοτικές (Quantitative): Μετρώνται με αριθμούς (π.χ. βάρος, ηλικία).

- Διακριτές: Παίρνουν συγκεκριμένες τιμές (π.χ. αριθμός παιδιών).
- Συνεχείς: Παίρνουν οποιαδήποτε τιμή σε ένα διάστημα (π.χ. ύψος, χρόνος).

- Τύποι

- Μέγεθος πληθυσμού: N
- Μέγεθος δείγματος: n
- Συχνότητα (frequency): Ο αριθμός φορών που εμφανίζεται μια τιμή (ν_i).
- Σχετική συχνότητα:

$$f_i = \frac{\nu_i}{n}$$

όπου ν_i είναι η συχνότητα της τιμής και n το μέγεθος δείγματος.

- Αθροιστική συχνότητα (N_i)

$$N_i = \sum_{j=1}^i \nu_j$$

- Αθροιστική σχετική συχνότητα (F_i)

$$F_i = \frac{N_i}{n}$$

Αριθμητικός Μέσος (Μέσος Όρος)

- Ο αριθμητικός μέσος (ή μέσος όρος) είναι το πηλίκο του αθροίσματος όλων των τιμών του δείγματος προς το πλήθος τους.
- Τύπος

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

$\bar{x}$: μέσος όρος,

x_i : η i -οστή παρατήρηση,

n : το πλήθος παρατηρήσεων,

$\sum x_i$: άθροισμα όλων των παρατηρήσεων.

Άσκηση

Σε ένα τμήμα 4 μαθητών οι βαθμοί ενός διαγωνίσματος ήταν: 5, 7, 8 και 10.
Να βρεθεί ο μέσος όρος των βαθμών.

Λύση

Καταγράφουμε τις τιμές: $x_1=5$, $x_2=7$, $x_3=8$, $x_4=10$

Υπολογίζουμε το άθροισμα:

$$\sum x_i = 5 + 7 + 8 + 10 = 30$$

Το πλήθος είναι $n=4$

Εφαρμόζουμε τον τύπο: $\bar{x} = \sum x_i / n = 30 / 4 = 7,5$

Ο μέσος όρος είναι 7,5.

Διάμεσος (Median)

- Η διάμεσος είναι η τιμή που χωρίζει τις παρατηρήσεις σε δύο ίσα μέρη αφού πρώτα ταξινομηθούν σε αύξουσα σειρά.
- Αν n είναι περιττός:

$$\text{Διάμεσος} = x_{\frac{n+1}{2}}$$

- Αν n είναι άρτιος:

$$\text{Διάμεσος} = \frac{x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1}}{2}$$

Άσκηση

Οι ηλικίες 5 παιδιών είναι: 2, 5, 7, 8, 10.

Να βρεθεί η διάμεσος.

Λύση

Το πλήθος είναι $n=5$ (περιττός αριθμός).

Θέση διαμέσου: $(n+1)/2=5+1/2=3$

Η 3^η τιμή της ταξινομημένης σειράς είναι 7.

Η διάμεσος είναι 7

Άσκηση

Οι μισθοί 4 εργαζομένων είναι: 3, 4, 6, 8 (σε χιλιάδες €).

Να βρεθεί η διάμεσος.

Λύση

Το πλήθος είναι $n=4$ (άρτιος αριθμός).

Η διάμεσος είναι ο μέσος όρος των τιμών στις θέσεις $n/2=2$ και $(n/2)+1=3$

Οι τιμές αυτές είναι 4 και 6.

Διάμεσος $= (4+6)/2=5$

Η διάμεσος είναι 5.

Επικρατούσα Τιμή

- Η επικρατούσα τιμή (ή τρόπος) είναι η τιμή που εμφανίζεται με τη μεγαλύτερη συχνότητα.

Άσκηση

Δίνονται οι τιμές: 2, 4, 4, 6, 7, 7, 7, 8.

Να βρεθεί η επικρατούσα τιμή.

Λύση

Το 2 εμφανίζεται 1 φορά, το 4 εμφανίζεται 2 φορές, το 7 εμφανίζεται 3 φορές, το 8 εμφανίζεται 1 φορά.

Η μεγαλύτερη συχνότητα είναι 3, που αντιστοιχεί στην τιμή 7. Η επικρατούσα τιμή είναι 7.

Εύρος (R)

- Τι μετράει: Δείχνει τη διαφορά ανάμεσα στη μεγαλύτερη και τη μικρότερη τιμή του δείγματος.
- Χρησιμότητα: Επηρεάζεται πολύ από ακραίες τιμές.
- Τύπος:

$$R = X_{\max} - X_{\min}$$

όπου:

$X_{\max}$ = μέγιστη τιμή, $X_{\min}$ = ελάχιστη τιμή

Άσκηση

Οι βαθμολογίες 5 μαθητών είναι: 5, 7, 9, 12, 15. Να βρεθεί το εύρος.

Λύση

$$X_{\max} = 15, X_{\min} = 5$$

$$R = 15 - 5 = 10$$

Το εύρος είναι 10 μονάδες.

Διακύμανση (σ^2 ή s^2)

- Τι μετράει: Το πόσο διασκορπισμένες είναι οι τιμές γύρω από τον μέσο όρο.
- Χρησιμότητα: Δίνει πιο ολοκληρωμένη εικόνα από το εύρος γιατί λαμβάνει υπόψη όλες τις τιμές.
- Τύποι:

Για πληθυσμό:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \mu)^2}{N}$$

Για δείγμα:

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n - 1}$$

όπου:

x_i = κάθε τιμή δεδομένων

μ = μέσος όρος πληθυσμού

$\bar{x}$ = μέσος όρος δείγματος

N = μέγεθος πληθυσμού

n = μέγεθος δείγματος

Τυπική Απόκλιση (σ ή s)

- Τι μετράει: Είναι η «μέση απόσταση» των τιμών από τον μέσο όρο.
- Χρησιμότητα: Εκφράζεται στις ίδιες μονάδες με τα δεδομένα, γι' αυτό είναι πιο κατανοητή από τη διακύμανση.
- Τύπος:

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}, \quad s = \sqrt{s^2}$$