

Παράγωγοι

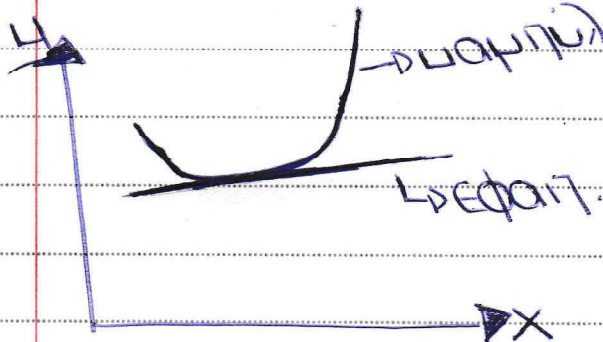


Σημειώσεις - Λυμένα Θέματα

e-students.gr

© 698 93 94 741

ΧΕΛΩΜΕΤΡΙΚΟ
ΠΡΟΒΛΗΜΑ



⇒ Η παράγωγος σε ένα σημείο είναι η κλίση της εφαπτομένης της ευθείας σε μια λανθάνουσα

Εξίσωση ευθείας:

$$y - y_0 = \lambda(x - x_0)$$

ΦΥΣΙΚΟ
ΠΡΟΒΛΗΜΑ

⇒ Η παράγωγος της θέσης ως προς το χρόνο είναι η ταχύτητα.

Η παράγωγος της f στο x_0 συμβολίζεται με:

$$f'(x_0) \text{ ή } \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x_0} \text{ ή } \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_0}$$



Σημειώσεις - Λυμένα Θέματα

e-students.gr

© 698 93 94 741

Παράγωγοι Βασικών Συναρτήσεων

$$(c)' = 0$$

$$(x^r)' = r x^{r-1}$$

$$(x)' = 1$$

$$(x^x)' = x^x (\log x + 1)$$

$$(x^n)' = n x^{n-1}$$

$$(\sin^{-1} x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\cos^{-1} x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(\tan^{-1} x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

$$(\cot^{-1} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

$$(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} = -\csc^2 x$$

$$(\sinh x)' = \cosh x$$

$$(e^x)' = e^x$$

$$(\cosh x)' = \sinh x$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$(\tanh x)' = \operatorname{sech}^2 x$$

$$(a^x)' = a^x \ln a$$



$$(\sec x)' = \sec x \cdot \tan x$$

$$(\csc x)' = -\csc x \cdot \cot x$$

! Θυμίσου ότι

• Οι $\sinh x, \cosh x, \tanh x$ λέγονται υπερβολικές συναρτήσεις

• Οι $\sin^{-1} x, \cos^{-1} x, \tan^{-1} x, \cot^{-1} x$ λέγονται αντίστροφες τριγωνομετρικές συναρτήσεις
($\tan^{-1} x = \arctan x$, τόσο εφαπτομένης)

● ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΠΑΡΑΧΩΡΙΣΤΩΝ



Σημειώσεις - Λυμένα Θέματα

e-students.gr

© 698 93 94 741

$$\bullet (c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$$

Π.χ $(3 \cdot 2x^2)' = 3 \cdot (2x^2)' = 3 \cdot 2 \cdot 2x^{2-1} = 12x$ $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$

$$\bullet (f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$$

Π.χ $(e^x + \ln x)' = (e^x)' + (\ln x)'$
 $= e^x + \frac{1}{x}$ $(e^x)' = e^x$
 $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

$$\bullet (f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

Π.χ $(\cos x \cdot \sin x)' = (\cos x)' \cdot \sin x + (\cos x) \cdot (\sin x)'$
 $= -\sin x \cdot \sin x + \cos x \cdot \cos x$
 $= -\sin^2 x + \cos^2 x$
 $(\cos x)' = -\sin x$
 $(\sin x)' = \cos x$

$$\bullet \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$$

Π.χ $\left(\frac{2x^2}{\ln x} \right)' = \frac{(2x^2)' \cdot \ln x - (2x^2) \cdot (\ln x)'}{(\ln x)^2}$
 $= \frac{4x \cdot \ln x - 2x^2 \cdot \frac{1}{x}}{(\ln x)^2}$
 $= \frac{4x \cdot \ln x - 2x}{(\ln x)^2}$

$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$
 $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

Εφαρμογή



Σημειώσεις - Λυμένα Θέματα

e-students.gr

© 698 93 94 741

Να υπολογιστεί η παράγωγος της συνάρτησης $f(x) = \frac{2\ln x + 5}{(1-x^2) \cdot (1+x^4)}$

Λύση

$$f(x) = \frac{2\ln x + 5}{(1-x^2) \cdot (1+x^4)}$$

$$f'(x) = ?$$

$$f'(x) = \left(\frac{2\ln x + 5}{(1-x^2) \cdot (1+x^4)} \right)'$$



Σημειώσεις - Λυμένα Θέματα

e-students.gr

© 698 93 94 741

ΤΥΠΟΣ
ΓΙΑ ΤΗΝ
ΠΑΡ.
ΤΟΥΤΟΥ

$$= \frac{(2\ln x + 5)' \cdot [(1-x^2)(1+x^4)] - (2\ln x + 5) \cdot [(1-x^2)(1+x^4)]'}{[(1-x^2)(1+x^4)]^2}$$

$$\frac{(2/x) \cdot (1-x^2)(1+x^4) - (2\ln x + 5) \cdot [-6x^3 + 4x - 2x]}{[(1-x^2)(1+x^4)]^2}$$



$$-(2\ln x + 5)' = (2\ln x)' + (5)'$$

$$= 2(\ln x)' + (5)'$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{x} + 0$$

$$= \frac{2}{x} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} & (f(x) + g(x))' \\ &= f'(x) + g'(x) \\ & (c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x) \\ & (\ln x)' = \frac{1}{x} \\ & (c)' = 0 \end{aligned}$$

$$\rightarrow [(1-x^2) \cdot (1+x^4)]'$$

$$= (1-x^2)' \cdot (1+x^4) + (1-x^2) \cdot (1+x^4)'$$

$$= [(1)' - (x^2)'] \cdot (1+x^4) + (1-x^2) \cdot [(1)' + (x^4)']$$

$$= [0 - 2x] \cdot (1+x^4) + (1-x^2) \cdot [0 + 4x^3]$$

$$= [-2x] \cdot (1+x^4) + (1-x^2) \cdot [4x^3]$$

$$= (-2x) \cdot 1 + (-2x) \cdot x^4 + 1 \cdot 4x^3 - (x^2) \cdot (4x^3)$$

$$\begin{aligned} &= (-2x) - 2x^5 + 4x^3 - 4x^5 \\ &= -6x^5 + 4x^3 - 2x \quad (2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) \\ & + f(x) \cdot g'(x) \end{aligned}$$

● Παράγωγος σύνθετης συνάρτησης

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

● Εφαρμογή



Σημειώσεις - Λυμένα Θέματα

e-students.gr

☎ 698 93 94 741

Να βρεθούν οι παράγωγοι των συνάρτησεων

i) $f(x) = (3x^2 + 5)^9$

ii) $g(x) = e^{-x^2+1}$



Σημειώσεις - Λυμένα Θέματα

e-students.gr

☎ 698 93 94 741

Λύση

i) $((3x^2 + 5)^9)' = 9 \cdot (3x^2 + 5)^{9-1} \cdot (3x^2 + 5)'$

$$= 9 \cdot (3x^2 + 5)^8 \cdot 6x$$
$$= 54x \cdot (3x^2 + 5)^8$$

ii) $(e^{-x^2+1})' = e^{-x^2+1} \cdot (-x^2+1)'$

$$= e^{-x^2+1} \cdot (-2x) = -2x e^{-x^2+1}$$



Σημειώσεις - Λυμένα Θέματα

e-students.gr

☎ 698 93 94 741

● Εφαρμογή

Να υπολογισθεί η παράγωγος $\frac{dy}{dx}$
της συνάρτησης $y = \sqrt[3]{x} + \sqrt[5]{x}$

Λύση



$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(\sqrt[3]{x} + \sqrt[5]{x})}{dx} = \frac{d(\sqrt[3]{x})}{dx} + \frac{d(\sqrt[5]{x})}{dx}$$

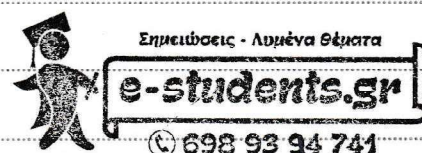
$$= \frac{d(x^{1/3})}{dx} + \frac{d(x^{1/5})}{dx}$$

$$= \frac{1}{3} x^{1/3-1} + \frac{1}{5} x^{1/5-1}$$



$$= \frac{1}{3} x^{-2/3} + \frac{1}{5} x^{-4/5}$$

● Εφαρμογή



Να βρεθεί η παράγωγος $\frac{dy}{dx}$
της συνάρτησης $y = \sin(x^3 + x)$

Λύση

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(\sin(x^3+x))}{dx}$$



Εμπειρίες - Λυμένα Θέματα

e-students.gr

© 698 93 94 741

$$= \cos(x^3+x) \cdot \frac{d(x^3+x)}{dx}$$

$$= \cos(x^3+x) \cdot (3x^2+1)$$

● Εφαρμογή



Εμπειρίες - Λυμένα Θέματα

e-students.gr

© 698 93 94 741

Να βρεθεί η παράγωγος $\frac{dy}{dx}$

της συνάρτησης i) $y = \sin 2x$

ii) $y = \sin^2 x$

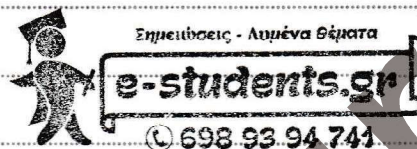
$$i) \frac{dy}{dx} = \frac{d(\sin 2x)}{dx} = \cos 2x \cdot \frac{d(2x)}{dx} = 2\cos 2x$$

$$ii) \frac{dy}{dx} = \frac{d(\sin^2 x)}{dx} = \frac{d(\sin x)^2}{dx}$$

$$= 2\sin x \cdot \frac{d(\sin x)}{dx} = 2\sin x \cdot \cos x = \sin 2x$$

● Δεύτερη Παράγωγος

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d(dy)}{dx dx}$$



Π.χ

$$y = (2 \cdot \ln x)$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = ?$$

1^{ov}

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(2 \ln x)}{dx} = 2 \cdot \frac{1}{x}$$

2^{ov}

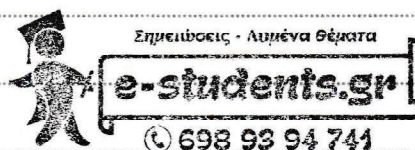
$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{2}{x} \right) = 2 \cdot \frac{d(x^{-1})}{dx}$$

$$= 2 \cdot (-1) \cdot x^{-1-1}$$

$$= -2x^{-2}$$

● Τρίτη Παράγωγος

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = \frac{d(d^2 y)}{dx dx^2}$$



Εφαρμογή

Να υπολογισθεί η παράγωγος $\frac{d^2 y}{dx^2}$

Όταν $y = \frac{e^x}{x^2}$

Λύση



Εμπειρίες - Απρόβλεπτα

e-students.gr

© 698 93 94 741

1^η

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \left(\frac{e^x}{x^2} \right) = \frac{\left[\frac{d(e^x)}{dx} \cdot x^2 - e^x \cdot \frac{d(x^2)}{dx} \right]}{(x^2)^2}$$

$$= \frac{-(e^x) \cdot x^2 - e^x \cdot 2x}{x^4}$$

2^η

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{e^x \cdot x^2 - e^x \cdot 2x}{x^4} \right)$$



Εμπειρίες - Απρόβλεπτα

e-students.gr

© 698 93 94 741

$$= \frac{-\frac{d}{dx}(e^x \cdot x^2 - e^x \cdot 2x) \cdot x^4 - (e^x \cdot x^2 - e^x \cdot 2x) \cdot \frac{d}{dx}(x^4)}{(x^4)^2}$$

$$= \frac{-\left[\left(\frac{d}{dx}(e^x) \cdot x^2 + e^x \cdot \frac{d}{dx}(x^2) \right) - \left(\frac{d}{dx}(e^x) \cdot 2x + e^x \cdot \frac{d}{dx}(2x) \right) \right] \cdot x^4 - (e^x \cdot x^2 - e^x \cdot 2x) \cdot 4x^3}{x^8}$$

$$\frac{[e^x \cdot x^2 + e^x \cdot 2x] - [e^x \cdot 2x + e^x \cdot 2]}{x^8} x^4 - [e^x \cdot x^2 - e^x \cdot 2x] 4x^3$$

$$\frac{-x^4 [e^x \cdot x^2 - 2e^x] - 4x^4 (e^x \cdot x - e^x \cdot 2)}{x^4 \cdot x^4}$$

$$\frac{-x^4 [e^x (x^2 - 2 - 4 \cdot x + 4 \cdot 2)]}{x^4 \cdot x^4}$$

$$\frac{-e^x (x^2 - 4x + 6)}{x^4}$$



Σημειώσεις - Λύματα Θέματα

e-students.gr

© 698 93 94 741

● Παραμετροποίηση ($\frac{dy}{dx} = ?$ $x(t), y(t)$)

Τύπος

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}$$



Εμπειρίες - Λυμένα Θέματα

e-students.gr

© 698 93 94 741

● Εφαρμογή

Δίνονται $x(t) = t - t^2$
 $y(t) = t - t^3$

$$\frac{dy}{dx} = ?$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{1-3t^2}{1-2t}$$



Εμπειρίες - Λυμένα Θέματα

e-students.gr

© 698 93 94 741

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d(t-t^3)}{dt} = 1-3t^2$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d(t-t^2)}{dt} = 1-2t$$