

Λογισμός Συναρτήσεων μιας Μεταβλητής



Παράγωγος

Γεωμετρική ερμηνεία: Η παράγωγος μιας συνάρτησης f σε ένα σημείο x_0 δείχνει πόσο “απότομα” αλλάζει η συνάρτηση εκεί. Γεωμετρικά, εκφράζει την κλίση της εφαπτομένης ευθείας της γραφικής παράστασης στο σημείο $(x_0, f(x_0))$.

Φυσική ερμηνεία: Στη Φυσική, η παράγωγος δείχνει το ρυθμό μεταβολής ενός μεγέθους ως προς ένα άλλο. Για παράδειγμα: Αν $x(t)$ είναι η θέση ενός σώματος, τότε η παράγωγος της θέσης ως προς τον χρόνο είναι η ταχύτητα του σώματος, δηλαδή πόσο αλλάζει η θέση ανά μονάδα χρόνου.

Ορισμός παραγώγου

Η παράγωγος της f στο σημείο x_0 ορίζεται ως το όριο:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Αν το όριο αυτό υπάρχει, λέμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 .

Συμβολισμοί της παραγώγου

Η παράγωγος μπορεί να γραφτεί με διάφορους ισοδύναμους τρόπους:

$$f'(x), \quad f'(x_0), \quad y', \quad \frac{dy}{dx}, \quad \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_0}$$

$f'(x) \rightarrow$ Είναι ο πιο συνηθισμένος τρόπος γραφής.

$f'(x_0) \rightarrow$ Δείχνει την τιμή της παραγώγου στο σημείο x_0 .

$y' \rightarrow$ Χρησιμοποιείται όταν η συνάρτηση δίνεται ως $y=f(x)$.

$\frac{dy}{dx} \rightarrow$ Παράγωγος του y ως προς το x . Δείχνει ρητά ότι η παράγωγος παίρνεται ως προς το x .

$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_0} \rightarrow$ η παράγωγος του y ως προς το x , υπολογισμένη στο x μηδέν. Δηλώνει συγκεκριμένο σημείο υπολογισμού.

Παράγωγοι Συναρτήσεων



! Βασικοί τύποι παραγώγων

1. Παράγωγος σταθερής συνάρτησης

Αν $f(x)=c$, όπου c είναι σταθερός αριθμός, τότε:

$$f'(x) = 0$$

2. Παράγωγος της συνάρτησης $f(x)=x$

$$f'(x) = 1$$

3. Παράγωγος δύναμης του x

Αν $f(x)=x^n$, τότε:

$$f'(x) = n x^{n-1}$$

4. Παράγωγος εκθετικής συνάρτησης

$$(e^x)' = e^x$$

$$(a^x)' = a^x \ln a$$

5. Παράγωγος λογαριθμικής συνάρτησης

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

6. Παράγωγοι τριγωνομετρικών συναρτήσεων

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

7. Παράγωγοι αντίστροφων τριγωνομετρικών συναρτήσεων

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

! Κανόνες παραγώγισης

1. Κανόνας σταθερού πολλαπλασίου

Αν $f(x) = c \cdot g(x)$, τότε:

$$f'(x) = c \cdot g'(x)$$

Παράδειγμα:

Να βρεθεί η παράγωγος της $f(x) = 5x^3$

$$f'(x) = (5x^3)' = 5(x^3)' = 5 \cdot 3 \cdot x^2$$

2. Κανόνας αθροίσματος ή διαφοράς

Αν $f(x) = g(x) \pm h(x)$, τότε:

$$f'(x) = g'(x) \pm h'(x)$$

Παράδειγμα:

Να βρεθεί η παράγωγος της $f(x) = x^3 + 2x^2 - 5x + 7$

$$f'(x) = (x^3 + 2x^2 - 5x + 7)' = (x^3)' + (2x^2)' - (5x)' + (7)'$$

$$= (x^3)' + 2(x^2)' - 5(x)' + (7)' = 3x^2 + 2 \cdot 2 \cdot x - 5 \cdot 1 + 0$$

$$\Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 4x - 5$$

3. Κανόνας γινομένου

Αν $f(x) = g(x) \cdot h(x)$, τότε:

$$f'(x) = g'(x) h(x) + g(x) h'(x)$$

Παράδειγμα:

Να βρεθεί η παράγωγος της $f(x) = x^2 \sin x$

$$f'(x) = (x^2 \sin x)' = (x^2)' \cdot (\sin x) + (x^2) \cdot (\sin x)'$$

$$\Rightarrow f'(x) = 2x \cdot \sin x + x^2 \cdot \cos x$$

4. Κανόνας πηλίκου

Αν $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$, τότε:

$$f'(x) = \frac{g'(x)h(x) - g(x)h'(x)}{[h(x)]^2}$$

Παράδειγμα:

Να βρεθεί η παράγωγος της $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x - 1}$

$$f'(x) = \left(\frac{x^2+1}{x-1}\right)' = \frac{[(x^2+1)'(x-1) + (x^2+1)(x-1)']}{(x-1)^2}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{[2x^2 - 2x - x^2 - 1]}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x - 1}{(x-1)^2}$$

5. Κανόνας αλυσίδας (σύνθετη συνάρτηση)

Αν $f(x) = g(h(x))$, τότε:

$$f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x)$$

Παράδειγμα

Αν $f(x) = (3x+2)^4$, τότε με τον κανόνα αλυσίδας:

$$f'(x) = ((3x+2)^4)' = 4(3x+2)^3 \cdot (3x+2)'$$

$$\Rightarrow f'(x) = 4(3x+2)^3 \cdot (3)$$

$$\Rightarrow f'(x) = 12(3x+2)^3$$

Άσκηση

Να υπολογισθεί η παράγωγος $\frac{dy}{dx}$
 της συνάρτησης

$$y = \sqrt[3]{x} + \sqrt[5]{x}$$

Λύση

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{d(\sqrt[3]{x} + \sqrt[5]{x})}{dx} \\ &= \frac{d(\sqrt[3]{x})}{dx} + \frac{d(\sqrt[5]{x})}{dx} \\ &= \frac{d(x^{1/3})}{dx} + \frac{d(x^{1/5})}{dx} \\ &= \frac{1}{3}x^{1/3-1} + \frac{1}{5}x^{1/5-1} \\ \Rightarrow \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{3}x^{-2/3} + \frac{1}{5}x^{-4/5} \end{aligned}$$

Άσκηση



Να βρεθεί η παράγωγος $\frac{dy}{dx}$

της συνάρτησης

1. $y = \sin 2x$

2. $y = \sin^2 x$

Λύση

i) Για $y = \sin 2x$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(\sin 2x)}{dx} = \cos 2x \cdot \frac{d(2x)}{dx} = 2 \cos 2x$$

ii) Για $y = \sin^2 x$:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{d(\sin^2 x)}{dx} = \frac{d((\sin x)^2)}{dx} \\ &= 2 \sin x \cdot \frac{d(\sin x)}{dx} = 2 \sin x \cos x = \sin 2x \end{aligned}$$

Δεύτερη Παράγωγος

Αν μια συνάρτηση $y=f(x)$ είναι παραγωγίσιμη και η παράγωγός την $\frac{dy}{dx}$ είναι επίσης παραγωγίσιμη, τότε ορίζεται η δεύτερη παράγωγος της f ως:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right)$$

Η δεύτερη παράγωγος εκφράζει τον ρυθμό μεταβολής της πρώτης παραγώγου. Δηλαδή, δείχνει πώς αλλάζει η ταχύτητα μεταβολής της συνάρτησης.

Άσκηση

Να βρεθεί η δεύτερη παράγωγος της συνάρτησης $y=2\ln x$

Λύση

Βήμα 1: Πρώτη παράγωγος

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{d(2 \ln x)}{dx} = 2 \cdot \frac{d(\ln x)}{dx} \\ \Rightarrow \frac{dy}{dx} &= 2 \cdot \frac{1}{x} = \frac{2}{x} \end{aligned}$$

Βήμα 2: Δεύτερη παράγωγος

Τώρα παραγωγίζουμε ξανά το αποτέλεσμα $\frac{dy}{dx} = \frac{2}{x}$

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d\left(\frac{2}{x}\right)}{dx} = 2 \cdot \frac{d(x^{-1})}{dx} \\ \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} &= 2 \cdot (-x^{-2}) = -\frac{2}{x^2} \end{aligned}$$

Άρα

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{2}{x^2}$$

Παραμετρική παράγωγος

Όταν μια συνάρτηση δεν δίνεται με τη μορφή $y=f(x)$, αλλά οι μεταβλητές x και y εκφράζονται παραμετρικά ως:

$$\begin{aligned}x &= x(t) \\ y &= y(t)\end{aligned}$$

τότε η παράγωγος του y ως προς x δίνεται από τον τύπο:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

Δηλαδή, πρώτα υπολογίζουμε τις παραγώγους των $x(t)$ και $y(t)$ ως προς τον t και στη συνέχεια παίρνουμε το πηλίκο αυτών των δύο.

Άσκηση

Να βρεθεί η πρώτη και η δεύτερη παράγωγος της παραμετρικής συνάρτησης:

$$\begin{aligned}x(t) &= t^2 + 1 \\ y(t) &= t^3 + t\end{aligned}$$

Λύση

Υπολογισμός πρώτων παραγώγων

$$\frac{dx}{dt} = 2t, \quad \frac{dy}{dt} = 3t^2 + 1$$

Υπολογισμός της πρώτης παραμετρικής παραγώγου

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{3t^2 + 1}{2t}$$

Υπολογισμός της δεύτερης παραγώγου

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dx} \right)}{\frac{dx}{dt}}$$

Έχουμε:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3t^2 + 1}{2t}$$

Παράγωγος ως προς t:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \left(\frac{3t^2 + 1}{2t} \right) &= \frac{(6t)(2t) - (3t^2 + 1)(2)}{(2t)^2} \\ &= \frac{12t^2 - 6t^2 - 2}{4t^2} = \frac{6t^2 - 2}{4t^2}\end{aligned}$$

Τώρα διαιρούμε με $\frac{dx}{dt} = 2t$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{6t^2 - 2}{4t^2}}{2t} = \frac{6t^2 - 2}{8t^3}$$

Απλοποιούμε:

$$\Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{3t^2 - 1}{4t^3}$$

Τελικό αποτέλεσμα:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3t^2 + 1}{2t}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{3t^2 - 1}{4t^3}$$

Παράγωγος πεπλεγμένης συνάρτησης

Όταν η σχέση μεταξύ x και y δεν δίνεται ρητά ως $y=f(x)$, αλλά με μια εξίσωση που τις συνδέει έμμεσα:

$$F(x,y)=0$$

τότε για να βρούμε την παράγωγο $\frac{dy}{dx}$, θεωρούμε ότι το y εξαρτάται από το x

Άσκηση

Να υπολογιστεί η παράγωγος της συνάρτησης που ορίζεται έμμεσα από τη σχέση:

$$x^2+xy+y^2=7$$

Λύση

Βήμα 1: Παραγωγίζουμε και τα δύο μέλη ως προς x

$$\begin{aligned}\frac{d(x^2+xy+y^2)}{dx} &= \frac{d(7)}{dx} \\ \Rightarrow \frac{d(x^2)}{dx} + \frac{d(xy)}{dx} + \frac{d(y^2)}{dx} &= 0 \\ \Rightarrow \frac{d(x^2)}{dx} + \left[\frac{d(x)}{dx} y + x \frac{d(y)}{dx} \right] + \frac{d(y^2)}{dx} &= 0 \\ \Rightarrow \frac{d(x^2)}{dx} + \left[\frac{d(x)}{dx} y + x \frac{d(y)}{dx} \right] + \frac{d(y^2)}{dx} &= 0 \\ \Rightarrow 2x + \left[1 \cdot y + x \frac{d(y)}{dx} \right] + 2y \frac{d(y)}{dx} &= 0 \\ \Rightarrow 2x + y + x \frac{d(y)}{dx} + 2y \frac{d(y)}{dx} &= 0\end{aligned}$$

Βήμα 2 : Επίλυση ως προς $\frac{dy}{dx}$

$$\begin{aligned}\Rightarrow x \frac{d(y)}{dx} + 2y \frac{d(y)}{dx} &= -2x - y \\ \Rightarrow \frac{dy}{dx} [x + 2y] &= -2x - y \\ \Rightarrow \frac{dy}{dx} [x + 2y] &= -2x - y \\ \Rightarrow \frac{dy}{dx} &= \frac{-2x - y}{x + 2y}\end{aligned}$$

Καμπύλη: Εφαπτομένη & Κάθετη

Εφαπτομένη στο σημείο (x_0, y_0)

$$y - y_0 = \lambda (x - x_0)$$



Κάθετη στην εφαπτομένη στο ίδιο σημείο

$$y - y_0 = -\frac{1}{\lambda} (x - x_0)$$

Όπου

λ : παράγωγος στο σημείο (x_0, y_0) -κλίση της καμπύλης στο (x_0, y_0)

$$\lambda = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{(x_0, y_0)}$$

Άσκηση

Δίνεται η καμπύλη: $x^2 + y^2 - 5 = 0$. Βρείτε την εφαπτομένη και την κάθετη στο σημείο $P(1, 2)$

Λύση

Η παράγωγος δίνεται ως: $\lambda = \frac{dy}{dx}$ στο σημείο $P(1, 2)$

$$\begin{aligned} \frac{d(x^2 + y^2 - 5)}{dx} &= \frac{d(0)}{dx} \\ \Rightarrow \frac{d(x^2)}{dx} + \frac{d(y^2)}{dx} - \frac{d(5)}{dx} &= 0 \\ \Rightarrow 2x + 2y \frac{d(y)}{dx} &= 0 \\ \Rightarrow 2y \frac{d(y)}{dx} &= -2x \\ \Rightarrow \frac{dy}{dx} &= -\frac{x}{y} \end{aligned}$$

Άρα στο $P(1, 2)$:

$$\lambda = -\frac{1}{2}$$

Εφαπτομένη

Η εφαπτομένη στο σημείο $P(1,2)$:

$$y - y_0 = \lambda(x - x_0)$$
$$\Rightarrow y - 2 = -\frac{1}{2}(x - 1)$$

Κάθετη ευθεία

Η κάθετη στην εφαπτομένη έχει κλίση $-1/\lambda$:

$$y - y_0 = -\frac{1}{\lambda}(x - x_0)$$
$$\Rightarrow y - 2 = 2(x - 1)$$

Ακρότατα Συνάρτησης



Βήμα 1:Βρίσκουμε την παράγωγο

Υπολογίζουμε την πρώτη παράγωγο $f'(x)$.

Βήμα 2:Μηδενίζουμε την παράγωγο

Λύνουμε την εξίσωση $f'(x)=0$.

Τα σημεία που προκύπτουν λέγονται κρίσιμα σημεία.

Βήμα 3:Ελέγχουμε τη φύση του σημείου

Με τη δεύτερη παράγωγο:

Αν $f''(x_0)>0 \rightarrow$ Ελάχιστο

Αν $f''(x_0)<0 \rightarrow$ Μέγιστο

Αν $f''(x_0)=0 \rightarrow$ χρειάζεται περαιτέρω έλεγχος.

Άσκηση

Να βρεθούν τα ακρότατα της συνάρτησης $f(x)=x^3-3x^2+2$ και να χαρακτηριστούν ως μέγιστα ή ελάχιστα.

Λύση

Βήμα 1:Παράγωγος της συνάρτησης

$$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$$

Βήμα 2:Κρίσιμα σημεία

$$\text{Θέτουμε } f'(x)=0$$

$$3x(x-2)=0 \Rightarrow x=0 \text{ ή } x=2$$

Βήμα 3: Δεύτερη παράγωγος

$$f''(x) = 6x - 6$$

Υπολογίζουμε στα κρίσιμα σημεία:

- Για $x=0$

$$f''(0) = -6 < 0 \Rightarrow \textbf{Μέγιστο}$$

- Για $x=2$

$$f''(2) = 6 > 0 \Rightarrow \textbf{Ελάχιστο}$$

Τιμές των ακροτάτων

$$f(0) = 0^3 - 3 \cdot 0^2 + 2 = 2$$

$$f(2) = 2^3 - 3 \cdot 2^2 + 2 = 8 - 12 + 2 = -2$$