

# Λογισμός πολλών Μεταβλητών και Διανυσματική Ανάλυση



## Θεωρία: Διπλά Ολοκληρώματα (Περίπτωση 1)

### 1. Ορισμός σε Ορθογώνιο Χωρίο

Όταν το χωρίο ολοκλήρωσης  $D$  είναι ένα ορθογώνιο, οι μεταβλητές  $x$  και  $y$  κυμαίνονται μεταξύ σταθερών ορίων:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$$

Σε αυτή την περίπτωση, το διπλό ολοκλήρωμα της συνάρτησης  $f(x, y)$  πάνω στο  $D$  μπορεί να υπολογιστεί με δύο τρόπους (διαδοχική ολοκλήρωση), ανάλογα με τη σειρά που επιλέγουμε:

1. Ολοκλήρωση πρώτα ως προς  $y$ :  $\int_a^b \left[ \int_c^d f(x, y) dy \right] dx$
2. Ολοκλήρωση πρώτα ως προς  $x$ :  $\int_c^d \left[ \int_a^b f(x, y) dx \right] dy$

### 2. Εφαρμογή (Άσκηση)

**Εκφώνηση:** Να υπολογιστεί το διπλό ολοκλήρωμα  $I = \iint_D (x^2y + y^3) dx dy$ , όταν το χωρίο ολοκλήρωσης είναι το ορθογώνιο  $D = [0, 1] \times [0, 2]$ . (Σημείωση: Αυτό σημαίνει  $0 \leq x \leq 1$  και  $0 \leq y \leq 2$ ).

#### Αναλυτική Λύση:

**Βήμα 1: Τοποθέτηση των ορίων** Επιλέγουμε να ολοκληρώσουμε πρώτα ως προς  $y$  και μετά ως προς  $x$ :

$$I = \int_0^1 \left[ \int_0^2 (x^2y + y^3) dy \right] dx$$

$$\text{Βήμα 2: Εσωτερική Ολοκλήρωση (ως προς } y) \implies I = \int_0^1 \left[ \frac{1}{2}x^2y^2 + \frac{1}{4}y^4 \right]_0^2 dx$$

$$(\text{Εδώ αντικαθιστούμε το } y = 2 \text{ και το } y = 0 \text{ μέσα στην παρένθεση}): \implies I = \int_0^1 \left( \frac{1}{2}x^2 \cdot 2^2 + \frac{1}{4} \cdot 2^4 - 0 \right) dx \implies I = \int_0^1 (2x^2 + 4) dx$$

$$\text{Βήμα 3: Εξωτερική Ολοκλήρωση (ως προς } x) \implies I = \left[ 2 \frac{x^3}{3} + 4x \right]_0^1$$

$$(\text{Αντικαθιστούμε το } x = 1 \text{ και το } x = 0): \implies I = \left( \frac{2 \cdot 1^3}{3} + 4 \cdot 1 \right) \implies I = \frac{2}{3} + 4$$

$$\text{Τελικό Αποτέλεσμα: } \implies I = \frac{14}{3}$$

## Θεωρία: Διπλά Ολοκληρώματα (Περίπτωση 2)

### 1. Ορισμός σε Γενικό Χωρίο

Όταν το χωρίο ολοκλήρωσης  $D$  δεν είναι ορθογώνιο, αλλά ορίζεται από δύο συναρτήσεις του  $x$ , τότε τα όρια για τη μεταβλητή  $y$  είναι συναρτήσεις:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$$

Ο τύπος του διπλού ολοκληρώματος σε αυτή την περίπτωση είναι:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \left[ \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy \right] dx$$

### 2. Εφαρμογή (Άσκηση)

**Εκφώνηση:** Να υπολογιστεί το διπλό ολοκλήρωμα  $I = \iint_D (4xy - y^3) dx dy$ , όταν το χωρίο  $D$  ορίζεται από τις σχέσεις  $0 \leq x \leq 1$  και  $x^3 \leq y \leq \sqrt{x}$ .

**Αναλυτική Λύση:**

**Βήμα 1: Εσωτερική Ολοκλήρωση (ως προς  $y$ )** Ολοκληρώνουμε τη συνάρτηση  $4xy - y^3$  ως προς  $y$ , θεωρώντας το  $x$  σταθερό:

$$I = \int_0^1 \left[ \int_{x^3}^{\sqrt{x}} (4xy - y^3) dy \right] dx$$

$$\implies I = \int_0^1 \left[ 2xy^2 - \frac{y^4}{4} \right]_{x^3}^{\sqrt{x}} dx$$

**Βήμα 2: Αντικατάσταση Ορίων** Αντικαθιστούμε το πάνω όριο ( $\sqrt{x}$ ) και το κάτω όριο ( $x^3$ ) στη θέση του  $y$ :

$$\Rightarrow I = \int_0^1 \left[ \left( 2x(\sqrt{x})^2 - \frac{(\sqrt{x})^4}{4} \right) - \left( 2x(x^3)^2 - \frac{(x^3)^4}{4} \right) \right] dx$$

$$\Rightarrow I = \int_0^1 \left[ \left( 2x^2 - \frac{x^2}{4} \right) - \left( 2x^7 - \frac{x^{12}}{4} \right) \right] dx$$

$$\Rightarrow I = \int_0^1 \left( \frac{7}{4}x^2 - 2x^7 + \frac{1}{4}x^{12} \right) dx$$

**Βήμα 3: Εξωτερική Ολοκλήρωση (ως προς  $x$ )** Ολοκληρώνουμε τώρα ως προς  $x$  από 0 έως 1:

$$\Rightarrow I = \left[ \frac{7}{12}x^3 - \frac{2}{8}x^8 + \frac{1}{4 \cdot 13}x^{13} \right]_0^1$$

$$\Rightarrow I = \left[ \frac{7}{12}x^3 - \frac{1}{4}x^8 + \frac{1}{52}x^{13} \right]_0^1$$

**Βήμα 4: Τελικοί Υπολογισμοί** Αντικαθιστώντας το  $x = 1$ :

$$\Rightarrow I = \frac{7}{12} - \frac{1}{4} + \frac{1}{52} = \frac{91 - 39 + 3}{156} = \frac{55}{156}$$

## Θεωρία: Διπλά Ολοκληρώματα (Περίπτωση 3)

### 1. Ορισμός Χωρίου

Σε αυτή την περίπτωση, το χωρίο  $D$  ορίζεται από δύο σταθερά όρια για τη μεταβλητή  $y$ , ενώ η μεταβλητή  $x$  κυμαίνεται ανάμεσα σε δύο συναρτήσεις του  $y$ :

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq y \leq d, h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\}$$

Ο τύπος υπολογισμού είναι:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d \left[ \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx \right] dy$$

**Εκφώνηση:** Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα  $I = \iint_D e^{x/y} dx dy$ , όπου  $D : 1 \leq y \leq 2$  και  $y \leq x \leq y^3$ .

**Λύση:**

**Βήμα 1: Τοποθέτηση των ορίων ολοκλήρωσης**

$$I = \int_1^2 \left[ \int_y^{y^3} e^{x/y} dx \right] dy$$

**Βήμα 2: Εσωτερική ολοκλήρωση (ως προς  $x$ )**  $\implies I = \int_1^2 [ye^{x/y}]_y^{y^3} dy$

(Αντικαθιστούμε τα όρια  $x = y^3$  και  $x = y$  μέσα στην αγκύλη):  $\implies I = \int_1^2 (ye^{y^3/y} - ye^{y/y}) dy \implies I = \int_1^2 (ye^{y^2} - ye^1) dy$

**Βήμα 3: Εξωτερική ολοκλήρωση (ως προς  $y$ )**  $\implies I = \left[ \frac{1}{2}e^{y^2} - \frac{e}{2}y^2 \right]_1^2$

(Αντικαθιστούμε τα όρια  $y = 2$  και  $y = 1$ ):  $\implies I = \left( \frac{1}{2}e^{2^2} - \frac{e}{2} \cdot 2^2 \right) - \left( \frac{1}{2}e^{1^2} - \frac{e}{2} \cdot 1^2 \right)$   
 $\implies I = \frac{1}{2}e^4 - 2e - \left( \frac{e}{2} - \frac{e}{2} \right)$

**Τελικό Αποτέλεσμα:**  $\implies I = \frac{1}{2}e^4 - 2e$

## Υπολογισμός Εμβαδού με Διπλό Ολοκλήρωμα

### Άσκηση

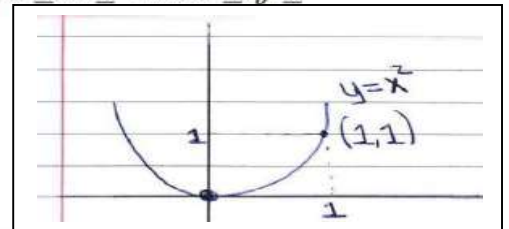
Να υπολογιστεί το εμβαδόν της περιοχής που περικλείεται ανάμεσα στις ευθείες  $x = 0$ ,  $x = 1$ ,  $y = 0$  και την καμπύλη  $y = x^2$ .

### Λύση

Το εμβαδόν  $E$  ενός χωρίου  $D$  δίνεται από τον τύπο:  $E = \iint_D dx dy$ .

**Βήμα 1: Τοποθέτηση των ορίων** Με βάση το σχήμα, τα όρια είναι  $0 \leq x \leq 1$  και  $0 \leq y \leq x^2$ :

$$E = \int_0^1 \left[ \int_0^{x^2} dy \right] dx$$



**Βήμα 2: Εσωτερική Ολοκλήρωση (ως προς  $y$ )**  $\implies E = \int_0^1 [y]_0^{x^2} dx \implies E = \int_0^1 x^2 dx$

**Βήμα 3: Εξωτερική Ολοκλήρωση (ως προς  $x$ )**  $\implies E = \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^1$

**Βήμα 4: Αντικατάσταση ορίων**  $\implies E = \frac{1^3}{3} - 0 = \frac{1}{3}$

## Άσκηση

Να υπολογιστεί το εμβαδόν της περιοχής  $R$  που περικλείεται από τις καμπύλες:

- $y = x^2$  (παραβολή με άνοιγμα προς τα πάνω)
- $y = 2 - x^2$  (παραβολή με άνοιγμα προς τα κάτω)

## Λύση

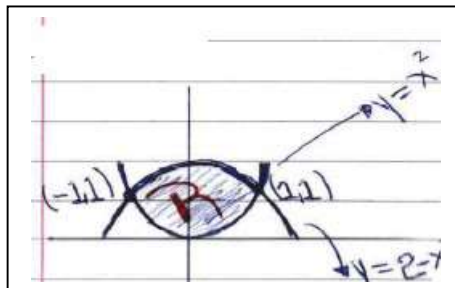
Για να ορίσουμε τα όρια ολοκλήρωσης, πρέπει πρώτα να βρούμε πού τέμνονται οι δύο καμπύλες:

$$x^2 = 2 - x^2 \implies 2x^2 = 2 \implies x^2 = 1 \implies x = \pm 1$$

- Για  $x = 1$ , το  $y = 1^2 = 1$ . Άρα σημείο τομής το  $(1, 1)$ .
- Για  $x = -1$ , το  $y = (-1)^2 = 1$ . Άρα σημείο τομής το  $(-1, 1)$ .

Στο σχήμα βλέπουμε ότι η περιοχή  $R$  περιορίζεται:

- **Αριστερά και δεξιά:** από  $x = -1$  έως  $x = 1$ .
- **Κάτω:** από την καμπύλη  $y = x^2$ .
- **Πάνω:** από την καμπύλη  $y = 2 - x^2$ .



Το εμβαδόν  $E$  δίνεται από το διπλό ολοκλήρωμα:

$$E = \iint_R dx dy$$

**Βήμα 1: Τοποθέτηση ορίων**

$$\Rightarrow E = \int_{-1}^1 \left[ \int_{x^2}^{2-x^2} dy \right] dx$$

**Βήμα 2: Εσωτερική ολοκλήρωση (ως προς  $y$ )**

$$\Rightarrow E = \int_{-1}^1 [y]_{x^2}^{2-x^2} dx$$

$$\Rightarrow E = \int_{-1}^1 (2 - x^2 - x^2) dx$$

$$\Rightarrow E = \int_{-1}^1 (2 - 2x^2) dx$$

**Βήμα 3: Εξωτερική ολοκλήρωση (ως προς  $x$ )**

$$\Rightarrow E = \left[ 2x - \frac{2x^3}{3} \right]_{-1}^1$$

**Βήμα 4: Αντικατάσταση ορίων**

$$\Rightarrow E = \left( 2(1) - \frac{2}{3}(1)^3 \right) - \left( 2(-1) - \frac{2}{3}(-1)^3 \right)$$

$$\Rightarrow E = \left( 2 - \frac{2}{3} \right) - \left( -2 + \frac{2}{3} \right)$$

$$\Rightarrow E = \frac{4}{3} - \left( -\frac{4}{3} \right) = \frac{4}{3} + \frac{4}{3}$$

**Τελικό Αποτέλεσμα:**

$$\Rightarrow E = \frac{8}{3}$$