

Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Οικονομολόγους II

Πολλαπλασιασμός Πινάκων

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 & 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 \\ 3 \cdot 0 + 4 \cdot 1 & 3 \cdot 2 + 4 \cdot 1 \end{bmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 10 \end{bmatrix}$$



Σημειώσεις - Λυμένα Θέματα

e-students.gr

☎ 698 93 94 741

1) $A \cdot B \neq B \cdot A$

2) $A_{2 \times 2} \cdot B_{2 \times 3} = AB_{2 \times 3}$



● Πινάκας



Σημειώσεις - Λυμένα θέματα

e-students.gr

© 698 93 94 741

Πίνακας ονομάζουμε μια ορθογώνια διάταξη $m \times n$ αριθμών σε m γραμμές και n στήλες.

$$A_{m \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{mj} & & & a_{mn} \end{bmatrix}$$



Σημειώσεις - Λυμένα θέματα

e-students.gr

© 698 93 94 741

● Τετραγωνικός Πίνακας

Περιέχει τον ίδιο αριθμό γραμμών και στήλων, είναι δηλαδή μέγεθος $n \times n$ με $n \in \mathbb{N}$.

Παράδειγμα: $A_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

● Μοναδιαίος Πίνακας

$$I_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$I_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Κατηγορίες Τετραγωνικών Πινάκων

→ Διογώνιος

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}$$



Σημειώσεις - Ασκήσεις Θέματα

e-students.gr

© 698 93 94 741

→ Άνω Τριγωνικός

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}$$

→ Κάτω Τριγωνικός

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$



Σημειώσεις - Ασκήσεις Θέματα

e-students.gr

© 698 93 94 741

→ Συμμετρικός ($a_{ij} = a_{ji}$)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 8 \\ 5 & 3 & -2 \\ 8 & -2 & 9 \end{bmatrix}$$

$$(A^T = A)$$

→ Αντισυμμετρικός ($a_{ij} = -a_{ji}$)

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 5 & -3 \\ -5 & 0 & 9 \\ 3 & -9 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(A^T = -A)$$



Εμπειρίες · Απρόβλεπτα

e-students.gr

© 698 93 94 741

→ Ανάστροφος Πίνακας A^T

Εστω ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -6 \\ 1 & 9 \end{bmatrix}$

τότε ο ανάστροφος του A είναι

$$A^T = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & -6 & 9 \end{bmatrix}$$



Εμπειρίες · Απρόβλεπτα

e-students.gr

© 698 93 94 741

→ Ορθογώνιος Πίνακας

Ορθογώνιος καλείται ο $n \times n$ τετραγωνικός πίνακας για τον οποίο ισχύει $A^T \cdot A = A \cdot A^T = I$



Εμπειρίες · Απρόβλεπτα

e-students.gr

© 698 93 94 741

→ Κανονικός Πίνακας

Κανονικός καλείται ο $n \times n$ τετραγωνικός πίνακας για τον οποίο ισχύει $AA^T = A^T A = I$



Ενός τετραγωνικού πίνακα A προκύπτει από το άθροισμα των στοιχείων που απρέχουν την διαγώνιο του A .

π.χ

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 2 & -6 & 7 \\ 1 & 9 & -2 \end{bmatrix}$$



$$\text{tr}(A) = 3 + (-6) + (-2) = -5.$$

Πρόσθεση Πινάκων

$$A+B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 5 & 3 \\ 7 & -6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 10 \\ 6 & -3 \\ -8 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+3 & -2+10 \\ 5+6 & 3+(-3) \\ 7+(-8) & -6+3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 11 & 0 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$$

Πολλαπλασιασμός Πινάκων



Σημειώσεις - Λυμένα Θέματα

e-students.gr

© 698 93 94 741

Π.χ

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 & 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 \\ 3 \cdot 0 + 4 \cdot 1 & 3 \cdot 2 + 4 \cdot 1 \end{bmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 10 \end{bmatrix}$$



Σημειώσεις - Λυμένα Θέματα

e-students.gr

© 698 93 94 741

Παρατήρηση :

- 1) $A \cdot B \neq B \cdot A$
- 2) $A_{2 \times 2} \cdot B_{2 \times 3} = AB_{2 \times 3}$

Πολλαπλασιασμός αριθμού - Πίνακα

Π.χ

$$3 \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 5 & 3 \\ 7 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \cdot 1 & 3 \cdot (-2) \\ 3 \cdot 5 & 3 \cdot 3 \\ 3 \cdot 7 & 3 \cdot (-6) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ 15 & 9 \\ 21 & -18 \end{bmatrix}$$

● Ορίσωση det n D

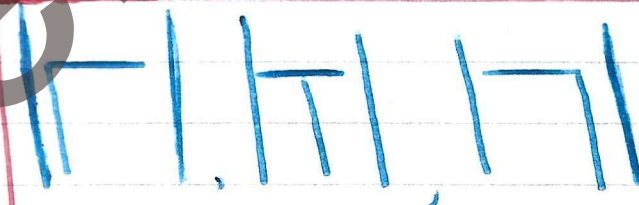
Δεύτερος Τάξης Ορίσωση

$$A_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 5 \cdot 4 - 3 \cdot 2 = 14$$

Τρίτης Τάξης Ορίσωση

$$A_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$



$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \underset{\text{Αλλαγή Τρόπου}}{\overset{!}{1}} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - \underset{\text{Αλλαγή Τρόπου}}{3} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} + \underset{\text{Αλλαγή Τρόπου}}{2} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 1(2 \cdot 3 - 1 \cdot 2) - 3[(-1) \cdot 3 - 1 \cdot 4] + 2[(-1) \cdot 2 - 2 \cdot 4]$$

$$= 1(6 - 2) - 3(-3 - 4) + 2(-2 - 8)$$

$$= 1(4) - 3(-7) + 2(-10) = 4 + 21 - 20 = 5.$$