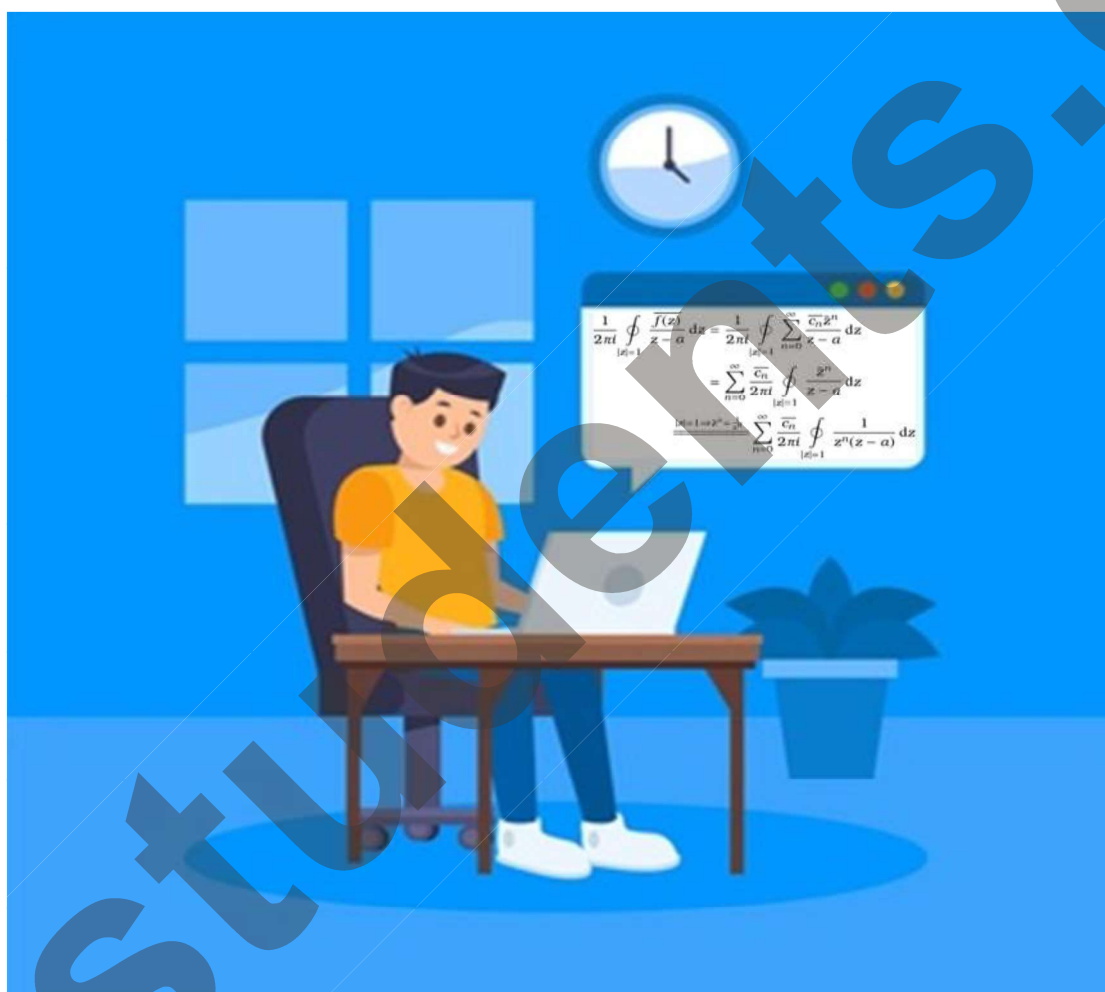


ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ III



Μικαδινός αριθμός



Σημειώσεις - Λυμένα θέματα

e-students.gr

© 698 93 94 741

→ Να λυθεί η εξίσωση $x^2 + x + 1 = 0$

$$\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot \gamma = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -3?$$

Υπάρχει λύση και είναι
μικαδινός αριθμός

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{(-1) \cdot 3}}{2}$$

$$\boxed{i^2 = -1}$$

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2} = \frac{-1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i \quad \text{μικαδινές λύσεις}$$

→ Μικαδινός αριθμός

$$\text{Π. x } \begin{matrix} 3+5i \\ -1+12i \end{matrix}$$

→ Συζυγής $\bar{z} = a - bi$



Σημειώσεις - Λυμένα θέματα

e-students.gr

© 698 93 94 741

↓
↓
πραγματικό
μέρος
 $\text{Re}(z)$

↓
φανταστικό
μέρος
 $\text{Im}(z)$

↓
αλλαγή προσήμου
μόνο στο φανταστικό
μέρος.

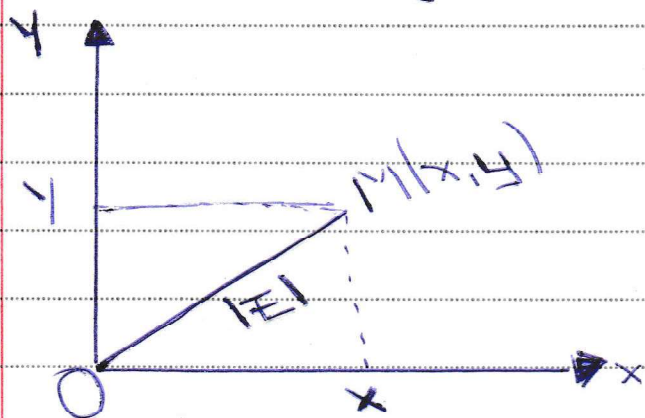
Μέτρο μιγαδικού αριθμού



Εμπειροεπί - Λυμένα Θέματα

e-students.gr

© 698 93 94 741



$|z|$: Μέτρο ενός μιγαδικού αριθμού

Είναι η απόσταση του M από την αρχή O

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

→ Ιδιότητες του μέτρου



Εμπειροεπί - Λυμένα Θέματα

e-students.gr

© 698 93 94 741

$$|z| = |\bar{z}| = |-z|$$

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$$

$$|z|^2 = z \cdot \bar{z}$$

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

$$|z^n| = |z|^n$$

→ Ιδιότητες συζυγίων



Εμπειροεπί - Λυμένα Θέματα

e-students.gr

© 698 93 94 741

$$z \bar{z} = 2a$$

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2} \right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$$

$$z - \bar{z} = 2bi$$

$$\overline{(z^n)} = (\bar{z})^n$$

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$$

Δυνάμεις στους μιγαδικούς

$$\cdot z^1 = z$$

$$\cdot z^2 = z \cdot z$$

$$\cdot z^0 = 1$$

$$\cdot z^{-n} = \frac{1}{z^n}$$



Σημειώσεις - Λογμένα Θέματα

e-students.gr

© 698 93 94 741

Δυνάμεις της φανταστικής μονάδας i

$$\cdot i^0 = 1$$

$$\cdot i^1 = i$$

$$\cdot i^2 = -1$$

$$\cdot i^3 = i^2 \cdot i = -i$$



Σημειώσεις - Λογμένα Θέματα

e-students.gr

© 698 93 94 741

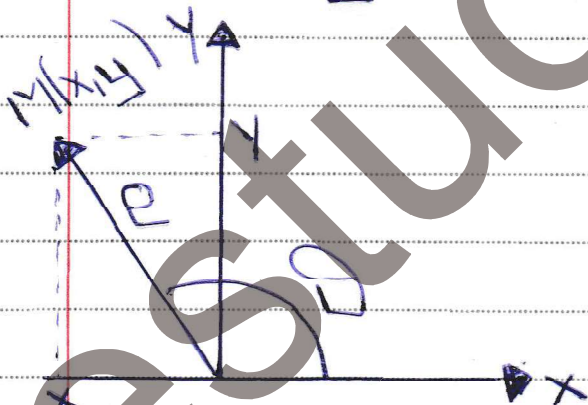
Τριγωνομετρική μορφή μιγαδικού αριθμού

$$z = x + yi$$

$$\rho = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\cos \theta = \frac{x}{\rho} \Rightarrow x = \rho \cos \theta$$

$$\sin \theta = \frac{y}{\rho} \Rightarrow y = \rho \sin \theta$$



Σημειώσεις - Λογμένα Θέματα

e-students.gr

© 698 93 94 741

$$z = x + yi = \rho \cos \theta + \rho \sin \theta i$$
$$\Rightarrow z = \rho (\cos \theta + i \sin \theta)$$

→ Τριγωνομετρική ή
Πολική μορφή του z

● Τριγωνομετρική μορφή μιγαδικών αριθμών



Σημειώσεις - Λυμένα θέματα

e-students.gr

698 93 94 741

Θεώρημα De Moivre

Αν $z = \rho(\cos \theta + i \sin \theta)$ είναι ένας μιγαδικός αριθμός σε τριγωνομετρική μορφή και n θετικός αριθμός τότε:

$$| z^n = \rho^n [\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)] |$$

● Λύση Τριωνυμικής Εξίσωσης στο C

Η εξίσωση $z^n = a$ όπου n θετικός ακεραίος και a μιγαδικός στην μορφή $a = \rho(\cos \theta + i \sin \theta)$, $\rho = |a|$ έχει τις λύσεις

$$z_k = \sqrt[n]{\rho} \left(\cos \frac{2k\pi + \theta}{n} + i \sin \frac{2k\pi + \theta}{n} \right)$$

$$k = 0, 1, 2, \dots, n-1$$



Σημειώσεις - Λυμένα θέματα

e-students.gr

698 93 94 741

● Μικαδικές συναρτήσεις



Σημειώσεις - Ασμένα Θέματα

e-students.gr

© 698 93 94 741

● Μικαδικός αριθμός $z = a + bi$

● Μέτρο μικαδικού $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

● Σημαντικές σχέσεις $a = \frac{z + \bar{z}}{2}$, $b = \frac{z - \bar{z}}{2i}$

● Συνθήκες Cauchy-Riemann (C-R)

αναλυτική: $f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + i v(x, y)$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (u_x = v_y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad (u_y = -v_x)$$



Σημειώσεις - Ασμένα Θέματα

e-students.gr

© 698 93 94 741

● Αρμονική συνάρτηση

η $u(x, y)$ για να είναι αρμονική συνάρτηση θα ικανοποιεί την εξίσωση Laplace:

$$u_{xx} + v_{yy} = 0 \Rightarrow \nabla^2 u = 0$$

Εφαρμογή



Εμπειρίες - Αμύενα θέματα

e-students.gr

© 698 93 94 741

Δίνεται η συνάρτηση $u(x,y) = 2xy + 3y$

- i) Να δείξει ότι είναι αρμονική
- ii) Να βρεθεί η αρμονική συζυγής $u(x,y)$
- iii) Να βρεθεί η έκφραση της μιγαδικής συνάρτησης $f(z)$

Λύση

i) $u(x,y) = 2xy + 3y$



Εμπειρίες - Αμύενα θέματα

e-students.gr

© 698 93 94 741

για να δείξω ότι είναι αρμονική
αρκεί να δείξω ότι ικανοποιεί
την εξίσωση Laplace

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad (\nabla^2 u = 0)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

$$\cdot \frac{\partial u}{\partial x} = u_x = \frac{\partial (2xy + 3y)}{\partial x} = 2y$$

$$\cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = u_{xx} = \frac{\partial (2y)}{\partial x} = 0 \Rightarrow \underline{u_{xx} = 0}$$

①

$$\frac{\partial u}{\partial y} = u_y = \frac{\partial (2x+3)}{\partial y} = 2x+3$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = u_{yy} = \frac{\partial (2x+3)}{\partial y} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0$$



Σημειώσεις - Λυμένα θέματα

e-students.gr

698 93 94 741

①

$$\Rightarrow u_{xx} + u_{yy} = 0 + 0 = 0$$

②

αφού ικανοποιεί την εξίσωση Laplace είναι αρμονική.

ii) Οι συναρτήσεις $u(x,y)$, $v(x,y)$ πρέπει να είναι το πραγματικό και το φανταστικό μέρος κάποιας αναλυτικής μιγαδικής συνάρτησης. Άρα ικανοποιούν τις συνθήκες "C-R"

$$u_x = v_y \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$u_y = -v_x \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

(ψάχνω $v(x,y)$?)



Σημειώσεις - Λυμένα θέματα

e-students.gr

698 93 94 741

1οι

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2y \text{ (από το προηγ. ερ.)}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \text{ (C-R)}$$



Σημειώσεις - Λυμένα θέματα

e-students.gr

© 698 93 94 741

$$\Rightarrow \frac{\partial v}{\partial y} = 2y$$

2οι

Ολοκληρώνω ως προς y και

$$\text{Έχω } v(x, y) = \int 2y dy + c(x)$$

$$v(x, y) = \frac{2y^2}{2} + c(x)$$



Σημειώσεις - Λυμένα θέματα

e-students.gr

© 698 93 94 741

$$v(x, y) = y^2 + c(x)$$

(για να βρω την $v(x, y)$ πρέπει
να βρω την $c(x)$)

3ον

$$V(x, y) = y^2 + c(x)$$

Παραγωγίζω ως προς την ταξινόμηση

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial (y^2 + c(x))}{\partial x}$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 0 + \frac{\partial c(x)}{\partial x}$$

$$\rightarrow \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial c(x)}{\partial x}$$

$$\rightarrow \frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{\partial U}{\partial y} \quad (\text{από } E=B) \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial c(x)}{\partial x}$$

$$\rightarrow \frac{\partial U}{\partial y} = 2x + 3 \quad (\text{από προηγ. ερώτ.})$$

$$\frac{\partial c(x)}{\partial x} = -(2x + 3)$$



Σημειώσεις - Λυμένα Θέματα

e-students.gr

☎ 698 93 94 741

4οι

$$\frac{\partial C(x)}{\partial x} = -(2x+3)$$

Ολοκληρώνουμε την τριγωνομετρική ως προς x

$$C(x) = \int -(2x+3) dx + C_1$$

$$C(x) = -\frac{2x^2}{2} - 3x + C_1$$



Σημειώσεις - Λυμένα Θέματα

e-students.gr

☎ 698 93 94 741

$$C(x) = -x^2 - 3x + C_1$$

5οι

Από το βήμα της C(x) την έχουμε αντιπαρατάσσοντας στην $V(x,y) = y^2 + C(x)$

$$\text{και έχω } V(x,y) = y^2 - x^2 - 3x + C_1$$

$$\text{iii) } f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$$

$$= (2xy + 3y) + i(y^2 - x^2 - 3x + C_1)$$



Σημειώσεις - Λυμένα Θέματα

e-students.gr

© 698 93 94 741

Αντικατάσταση των

$$x = \frac{z + \bar{z}}{2} \quad \text{και} \quad y = \frac{z - \bar{z}}{2i} \quad \text{στην } f(z)$$

$$f(z) = 2 \cdot \left(\frac{z + \bar{z}}{2} \right) \cdot \left(\frac{z - \bar{z}}{2i} \right) + 3 \cdot \left(\frac{z - \bar{z}}{2i} \right) + i \left(\left(\frac{z - \bar{z}}{2i} \right)^2 - \left(\frac{z + \bar{z}}{2} \right)^2 - 3 \cdot \left(\frac{z + \bar{z}}{2} \right) + C_1 \right)$$

$$= \frac{(z + \bar{z})(z - \bar{z})}{2i} + \frac{3(z - \bar{z})}{2i} + i \left(\frac{(z - \bar{z})^2}{-4} - \frac{(z + \bar{z})^2}{4} - \frac{3(z + \bar{z})}{2} + C_1 \right)$$



Σημειώσεις - Λυμένα Θέματα

e-students.gr

© 698 93 94 741

$$= \frac{z^2 - z\bar{z} + z\bar{z} - \bar{z}^2}{2i} + \frac{3(z - \bar{z})}{2i} + i \left(\frac{z^2 - 2z\bar{z} + \bar{z}^2}{-4} \right)$$

$$= \frac{-(z^2 + 2z\bar{z} + \bar{z}^2)}{4} - \frac{3(z + \bar{z})}{2} + C_1$$

$$= \frac{E^2 - \bar{E}^2}{2i} + \frac{3(E - \bar{E})}{2i} + i \left(\frac{-E^2 + 2E\bar{E} - \bar{E}^2 - E^2 - 2E\bar{E} - \bar{E}^2}{4} \right)$$

$$= \frac{3}{2} (E + \bar{E}) + C_1$$



Σημειώσεις - Λυμένα Θέματα

e-students.gr

© 698 93 94 741

$$= \frac{E^2}{2i} - \frac{\bar{E}^2}{2i} + \frac{3E}{2i} - \frac{3\bar{E}}{2i} - \frac{2E^2}{4} - \frac{2\bar{E}^2}{4} - \frac{3E}{2} - \frac{3\bar{E}}{2}$$

$$+ C_1 i$$

$$\left(\frac{1}{i} \right) = -i = \frac{1 \cdot (-1)}{i \cdot (-1)} = \frac{-1}{-i} = \frac{-1}{-i} = \frac{1}{i}$$

$$= \frac{-E^2 i}{2} + \frac{\bar{E}^2}{2} - \frac{3E i}{2} + \frac{3\bar{E}}{2} - \frac{1}{2} E^2 i - \frac{1}{2} \bar{E}^2$$

$$- \frac{3E i}{2} - \frac{3\bar{E}}{2} + C_1 i$$

$$= -\cancel{2} \cdot \frac{E^2 i}{2} - \cancel{2} \cdot \frac{3E i}{2} + C_1 i$$

$$= -E^2 i - 3E i + C_1 i$$



Σημειώσεις - Λυμένα Θέματα

e-students.gr

© 698 93 94 741