

Εφαρμοσμένα Μαθηματικά II



Μερικές παράγωγοι συνάρτησης δύο μεταβλητών

Έστω συνάρτηση

$$f(x,y)$$

Πρώτες μερικές παράγωγοι

- Μερική παράγωγος ως προς x

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x}$$

Παραγωγίζουμε ως προς x , θεωρώντας το y σταθερό.

- Μερική παράγωγος ως προς y

$$f_y = \frac{\partial f}{\partial y}$$

Παραγωγίζουμε ως προς y , θεωρώντας το x σταθερό.

Δεύτερες μερικές παράγωγοι

- Δεύτερη ως προς x

$$f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

- Δεύτερη ως προς y

$$f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

- Μικτές παράγωγοι

$$f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \quad f_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

Υπολογισμός:

- f_{xy} : πρώτα παράγωγος ως προς x , μετά ως προς y
- f_{yx} : πρώτα ως προς y , μετά ως προς x

Άσκηση

Δίνεται:

$$f(x,y)=3x^2y^3+2x^4$$

Να βρεθούν οι μερικές παράγωγοι f_x και f_y .

Λύση

Μερική παράγωγος ως προς x

Το y θεωρείται σταθερό.

$$f_x = \frac{\partial}{\partial x}(3x^2y^3+2x^4)$$

$$\Rightarrow f_x = 6xy^3 + 8x^3$$

Μερική παράγωγος ως προς y

Το x θεωρείται σταθερό.

$$f_y = \frac{\partial}{\partial y}(3x^2y^3+2x^4)$$

$$\Rightarrow f_y = 9x^2y^2$$

Άσκηση

Υπολογισμός μερικών παραγώγων σύνθετων συναρτήσεων

$$f(x,y)=\cos(x^2+y^2)$$

Θέλουμε να βρούμε: f_x και f_y

Λύση

$$f_x = \frac{\partial}{\partial x} [\cos(x^2 + y^2)]$$

$$\Rightarrow f_x = [-\sin(x^2 + y^2)] \frac{\partial}{\partial x}(x^2 + y^2)$$

$$\Rightarrow f_x = [-\sin(x^2 + y^2)] (2x + 0)$$

$$\Rightarrow f_x = [-2x \cdot \sin(x^2 + y^2)]$$

$$f_y = \frac{\partial}{\partial y} [\cos(x^2 + y^2)]$$

$$\Rightarrow f_y = [-\sin(x^2 + y^2)] \frac{\partial}{\partial y}(x^2 + y^2)$$

$$\Rightarrow f_y = [-\sin(x^2 + y^2)] (0 + 2y)$$

$$\Rightarrow f_y = [-2y \cdot \sin(x^2 + y^2)]$$

Πολυώνυμο Taylor συνάρτησης δύο μεταβλητών

Θεωρούμε συνάρτηση:

$$f(x,y)$$

και σημείο ανάπτυξης:

$$(a,b)$$

Στόχος: Να προσεγγίσουμε τη συνάρτηση κοντά στο σημείο (a,b) με ένα πολυώνυμο.

Πολυώνυμο Taylor πρώτου βαθμού

Χρησιμοποιούμε:

- την τιμή της συνάρτησης στο (a,b)
- τις πρώτες μερικές παραγώγους

Τύπος

$$f(x,y) \approx f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b)$$

Πολυώνυμο Taylor δεύτερου βαθμού

Τώρα λαμβάνουμε υπόψη και τις δεύτερες μερικές παραγώγους.

Τύπος

$$\begin{aligned} f(x,y) \approx & f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b) \\ & + \frac{1}{2} \left[f_{xx}(a,b)(x-a)^2 + f_{yy}(a,b)(y-b)^2 \right. \\ & \left. + 2f_{xy}(a,b)(x-a)(y-b) \right] \end{aligned}$$

Πολυώνυμο Taylor τρίτου βαθμού

Προσθέτουμε και τρίτες μερικές παραγώγους.

Τύπος

$$\begin{aligned}
 f(x, y) \approx & f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b) \\
 & + \frac{1}{2} \left[f_{xx}(a, b)(x - a)^2 + f_{yy}(a, b)(y - b)^2 \right. \\
 & \quad \left. + 2f_{xy}(a, b)(x - a)(y - b) \right] \\
 & + \frac{1}{6} \left[f_{xxx}(a, b)(x - a)^3 + f_{yyy}(a, b)(y - b)^3 \right]
 \end{aligned}$$

Άσκηση

Να γραφεί το πολυώνυμο Taylor 2ης τάξης της συνάρτησης

$$f(x, y) = x^2 \sin(xy)$$

στο σημείο $(1, 2\pi)$.

Λύση

Το πολυώνυμο Taylor 2ης τάξης μιας συνάρτησης $f(x, y)$ γύρω από το σημείο (a, b) είναι:

$$\begin{aligned}
 P_2(x, y) = & f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b) \\
 & + \frac{1}{2} \left[f_{xx}(a, b)(x - a)^2 + 2f_{xy}(a, b)(x - a)(y - b) + f_{yy}(a, b)(y - b)^2 \right]
 \end{aligned}$$

1ο Βήμα: Σημείο ανάπτυξης

$$a=1, b=2\pi$$

2ο Βήμα: Υπολογισμός της $f(a, b)$

$$f\left(1, \frac{\pi}{2}\right) = 1^2 \sin\left(1 \cdot \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

3ο Βήμα: Πρώτες μερικές παράγωγοι

$$f_x = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 \sin(xy)) = 2x \sin(xy) + x^2 y \cos(xy)$$

$$f_x(1, \frac{\pi}{2}) = 2$$

$$f_y = \frac{\partial}{\partial y}(x^2 \sin(xy)) = x^3 \cos(xy)$$

$$f_y(1, \frac{\pi}{2}) = 0$$

4ο Βήμα: Δεύτερες μερικές παράγωγοι

$$f_{xx}$$

$$\begin{aligned} f_{xx} &= \frac{\partial}{\partial x}(2x \sin(xy) + x^2 y \cos(xy)) \\ &= 2 \sin(xy) + 2xy \cos(xy) + 2xy \cos(xy) - x^2 y^2 \sin(xy) \end{aligned}$$

$$f_{xx}(1, \frac{\pi}{2}) = 2 - \pi^2$$

$$f_{yy}$$

$$f_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}(x^3 \cos(xy)) = -x^4 \sin(xy)$$

$$f_{yy}(1, \frac{\pi}{2}) = -1$$

$$f_{xy}$$

$$f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}(2x \sin(xy) + x^2 y \cos(xy)) = 3x^2 \cos(xy) - x^3 y \sin(xy)$$

$$f_{xy}(1, \frac{\pi}{2}) = -\frac{\pi}{2}$$

5ο Βήμα: Αντικατάσταση στον τύπο Taylor

$$\begin{aligned} P_2(x, y) &= 1 + 2(x - 1) + 0(y - \frac{\pi}{2}) \\ &\quad + \frac{1}{2}(2 - \pi^2)(x - 1)^2 - \frac{\pi}{2}(x - 1)(y - \frac{\pi}{2}) - \frac{1}{2}(y - \frac{\pi}{2})^2 \end{aligned}$$

Τελικό αποτέλεσμα

$$P_2(x, y) = 1 + 2(x - 1) + \frac{1}{2}(2 - \pi^2)(x - 1)^2 \\ - \frac{\pi}{2}(x - 1)(y - \frac{\pi}{2}) - \frac{1}{2}(y - \frac{\pi}{2})^2$$