

## Εφαρμοσμένα Μαθηματικά Ι



## Παράγωγος

Γεωμετρική ερμηνεία: Η παράγωγος μιας συνάρτησης  $f$  σε ένα σημείο  $x_0$  δείχνει πόσο “απότομα” αλλάζει η συνάρτηση εκεί. Γεωμετρικά, εκφράζει την κλίση της εφαπτομένης ευθείας της γραφικής παράστασης στο σημείο  $(x_0, f(x_0))$ .

Φυσική ερμηνεία: Στη Φυσική, η παράγωγος δείχνει το ρυθμό μεταβολής ενός μεγέθους ως προς ένα άλλο. Για παράδειγμα: Αν  $x(t)$  είναι η θέση ενός σώματος, τότε η παράγωγος της θέσης ως προς τον χρόνο είναι η ταχύτητα του σώματος, δηλαδή πόσο αλλάζει η θέση ανά μονάδα χρόνου.

### Ορισμός παραγώγου

Η παράγωγος της  $f$  στο σημείο  $x_0$  ορίζεται ως το όριο:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Αν το όριο αυτό υπάρχει, λέμε ότι η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο σημείο  $x_0$ .

### Συμβολισμοί της παραγώγου

Η παράγωγος μπορεί να γραφτεί με διάφορους ισοδύναμους τρόπους:

$$f'(x), \quad f'(x_0), \quad y', \quad \frac{dy}{dx}, \quad \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_0}$$

$f'(x) \rightarrow$  Είναι ο πιο συνηθισμένος τρόπος γραφής.

$f'(x_0) \rightarrow$  Δείχνει την τιμή της παραγώγου στο σημείο  $x_0$ .

$y' \rightarrow$  Χρησιμοποιείται όταν η συνάρτηση δίνεται ως  $y=f(x)$ .

$\frac{dy}{dx} \rightarrow$  Παράγωγος του  $y$  ως προς το  $x$ . Δείχνει ρητά ότι η παράγωγος παίρνεται ως προς το  $x$ .

$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_0} \rightarrow$  η παράγωγος του  $y$  ως προς το  $x$ , υπολογισμένη στο  $x$  μηδέν. Δηλώνει συγκεκριμένο σημείο υπολογισμού.

Παράγωγοι Συναρτήσεων● Βασικοί τύποι παραγώγων

1. Παράγωγος σταθερής συνάρτησης

Αν  $f(x)=c$ , όπου  $c$  είναι σταθερός αριθμός, τότε:

$$f'(x) = 0$$

2. Παράγωγος της συνάρτησης
- $f(x)=x$

$$f'(x) = 1$$

3. Παράγωγος δύναμης του
- $x$

Αν  $f(x)=x^n$ , τότε:

$$f'(x) = n x^{n-1}$$

4. Παράγωγος εκθετικής συνάρτησης

$$(e^x)' = e^x$$

$$(a^x)' = a^x \ln a$$

5. Παράγωγος λογαριθμικής συνάρτησης

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

6. Παράγωγοι τριγωνομετρικών συναρτήσεων

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

7. Παράγωγοι αντίστροφων τριγωνομετρικών συναρτήσεων

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

## ! Κανόνες παραγώγισης

### 1. Κανόνας σταθερού πολλαπλασίου

Αν  $f(x)=c \cdot g(x)$ , τότε:

$$f'(x) = c \cdot g'(x)$$

Παράδειγμα:

Να βρεθεί η παράγωγος της  $f(x)=5x^3$

$$f'(x)=(5x^3)'=5(x^3)'=5 \cdot 3 \cdot x^2$$

### 2. Κανόνας αθροίσματος ή διαφοράς

Αν  $f(x)=g(x) \pm h(x)$ , τότε:

$$f'(x) = g'(x) \pm h'(x)$$

Παράδειγμα:

Να βρεθεί η παράγωγος της  $f(x)=x^3+2x^2-5x+7$

$$f'(x)=(x^3+2x^2-5x+7)'=(x^3)'+(2x^2)'-(5x)'+(7)'$$

$$=(x^3)'+2(x^2)'-5(x)'+(7)'=3x^2+2 \cdot 2 \cdot x-5 \cdot 1+0$$

$$\Rightarrow f'(x)=3x^2+4x-5$$

### 3. Κανόνας γινομένου

Αν  $f(x)=g(x) \cdot h(x)$ , τότε:

$$f'(x) = g'(x) h(x) + g(x) h'(x)$$

Παράδειγμα:

Να βρεθεί η παράγωγος της  $f(x)=x^2 \sin x$

$$f'(x)=(x^2 \sin x)'=(x^2)' \cdot (\sin x) + (x^2) \cdot (\sin x)'$$

$$\Rightarrow f'(x)=2x \cdot \sin x + x^2 \cdot \cos x$$

### 4. Κανόνας πηλίκου

Αν  $f(x)=\frac{g(x)}{h(x)}$ , τότε:

$$f'(x) = \frac{g'(x)h(x) - g(x)h'(x)}{[h(x)]^2}$$

Παράδειγμα:

Να βρεθεί η παράγωγος της  $f(x)=\frac{x^2+1}{x-1}$

$$f'(x)=\left(\frac{x^2+1}{x-1}\right)'=\frac{[(x^2+1)'(x-1)-(x^2+1)(x-1)']}{(x-1)^2}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{[2x^2 - 2x - x^2 - 1]}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x - 1}{(x-1)^2}$$

## 5. Κανόνας αλυσίδας (σύνθετη συνάρτηση)

Αν  $f(x) = g(h(x))$ , τότε:

Παράδειγμα

$$f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x)$$

Αν  $f(x) = (3x+2)^4$ , τότε με τον κανόνα αλυσίδας:

$$f'(x) = ((3x+2)^4)' = 4(3x+2)^3 \cdot (3x+2)'$$

$$\Rightarrow f'(x) = 4(3x+2)^3 \cdot (3)$$

$$\Rightarrow f'(x) = 12(3x+2)^3$$

## Άσκηση

Να υπολογισθεί η παράγωγος  $\frac{dy}{dx}$   
της συνάρτησης

$$y = \sqrt[3]{x} + \sqrt[5]{x}$$

## Λύση

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{d(\sqrt[3]{x} + \sqrt[5]{x})}{dx} \\ &= \frac{d(\sqrt[3]{x})}{dx} + \frac{d(\sqrt[5]{x})}{dx} \\ &= \frac{d(x^{1/3})}{dx} + \frac{d(x^{1/5})}{dx} \\ &= \frac{1}{3}x^{1/3-1} + \frac{1}{5}x^{1/5-1} \\ \Rightarrow \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{3}x^{-2/3} + \frac{1}{5}x^{-4/5} \end{aligned}$$

## Άσκηση

Να βρεθεί η παράγωγος  $\frac{dy}{dx}$   
της συνάρτησης

1.  $y = \sin 2x$

2.  $y = \sin^2 x$

## Λύση

i) Για  $y = \sin 2x$ :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(\sin 2x)}{dx} = \cos 2x \cdot \frac{d(2x)}{dx} = 2 \cos 2x$$

ii) Για  $y = \sin^2 x$ :

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{d(\sin^2 x)}{dx} = \frac{d((\sin x)^2)}{dx} \\ &= 2 \sin x \cdot \frac{d(\sin x)}{dx} = 2 \sin x \cos x = \sin 2x \end{aligned}$$

## Σειρές

### Ακολουθίες και Σειρές

Ας έχουμε μια ακολουθία πραγματικών αριθμών  $(a_n)$ . Η σειρά που αντιστοιχεί σε αυτήν είναι το άθροισμα των όρων:

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots$$

Αν το μερικό άθροισμα

$$S_N = a_1 + a_2 + \dots + a_N$$

έχει πεπερασμένο όριο όταν  $N \rightarrow \infty$  δηλαδή

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N = S,$$

τότε η σειρά συγκλίνει και το άθροισμά της είναι  $S$ . Αν όχι, αποκλίνει.

## Μορφές και Σύγκλιση Σειρών

### 1. Γεωμετρική σειρά

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n$$

Σύγκλιση:

- Αν  $|q| < 1 \rightarrow$  συγκλίνει και

$$S = \frac{1}{1 - q}$$

- Αν  $|q| \geq 1 \rightarrow$  αποκλίνει

### 2. p-σειρά (ή σειρές του τύπου $1/n^p$ )

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

Σύγκλιση:

- Αν  $p > 1 \rightarrow$  συγκλίνει
- Αν  $p \leq 1 \rightarrow$  αποκλίνει

## Κριτήρια Σύγκλισης

### 1. Κριτήριο του Όρου

Αν  $\sum a_n$  συγκλίνει, τότε απαραίτητα

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

(το αντίστροφο δεν ισχύει).

### Άσκηση

Να εξετάσετε τη σύγκλιση της σειράς

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$$

### Λύση

$$a_n = \frac{n}{n+1}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = \frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n)'}{(n+1)'} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1} = 1$$

Το όριο είναι ίσο με  $1 \neq 0$ .

Άρα, με το κριτήριο του νιοστού όρου, η σειρά αποκλίνει.

## 2. Κριτήριο του Λόγου

Έστω σειρά με θετικούς όρους  $\sum a_n$ . Αν υπάρχει το όριο:

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$$

τότε:

Αν  $L < 1 \Rightarrow$  η σειρά συγκλίνει.

Αν  $L > 1 \Rightarrow$  η σειρά αποκλίνει.

Αν  $L = 1 \Rightarrow$  το κριτήριο είναι απροσδιόριστο.

### Άσκηση

Να εξετάσετε τη σύγκλιση της σειράς

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!}.$$

### Λύση

$$a_n = \frac{3^n}{n!}$$

$$a_{n+1} = \frac{3^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{3^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{3^n}{n!}} = \frac{3^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{3^n} = \frac{n! \cdot 3^{n+1}}{3^n (n+1)!} = 3 \cdot \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{3}{n+1}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n+1} = 0 < 1$$

Επομένως η σειρά συγκλίνει