

Ειδικά Κεφάλαια Φυσικής για Μηχανικούς



Κινηματική στο Χώρο (3 Διαστάσεις)



Η κίνηση ενός σώματος περιγράφεται πλήρως μέσω των διανυσματικών μεγεθών της θέσης, της ταχύτητας και της επιτάχυνσης.

Διάνυσμα Θέσης ($\mathbf{r}$)

Προσδιορίζει τη θέση του σώματος σε ένα τρισδιάστατο σύστημα συντεταγμένων (x, y, z)

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

- **Μέτρο (Απόσταση από την αρχή):** $|\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Συμβολισμοί

$\mathbf{r}$: Το διάνυσμα θέσης (ξεκινά από το $(0,0,0)$ και δείχνει το σώμα).

$\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$: Οι συντεταγμένες του σώματος στους τρεις άξονες.

$\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$: Τα **μοναδιαία διανύσματα**. Δείχνουν την κατεύθυνση των αξόνων x, y, z αντίστοιχα και έχουν μέτρο 1.

$|\mathbf{r}|$: Το μέτρο (μήκος) του διανύσματος, δηλαδή η ευθύγραμμη απόσταση από την αρχή των αξόνων.

Στιγμιαία Ταχύτητα ($\mathbf{u}$)

Ορίζεται ως ο ρυθμός μεταβολής του διανύσματος θέσης ως προς το χρόνο (παράγωγος).

$$\mathbf{u} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = u_x\mathbf{i} + u_y\mathbf{j} + u_z\mathbf{k}$$

- **Συνιστώσες:** $u_x = \frac{dx}{dt}, u_y = \frac{dy}{dt}, u_z = \frac{dz}{dt}$
- **Μέτρο:** $|\mathbf{u}| = \sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2}$

Συμβολισμοί

dt: Μια απειροελάχιστα μικρή χρονική στιγμή (μεταβολή χρόνου).

dr: Η πολύ μικρή μετατόπιση που έγινε στο χρόνο dt.

u_x, u_y, u_z : Οι ταχύτητες με τις οποίες κινείται το σώμα "παράλληλα" σε κάθε άξονα.

Στιγμιαία Επιτάχυνση (**a**)

Ορίζεται ως ο ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας ως προς το χρόνο.

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{u}}{dt} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}$$

- **Συνιστώσες:** $a_x = \frac{du_x}{dt}, a_y = \frac{du_y}{dt}, a_z = \frac{du_z}{dt}$
- **Μέτρο:** $|\mathbf{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$

a: Δείχνει πόσο γρήγορα αυξάνεται ή μειώνεται η ταχύτητα.



● Σχέσεις Παραγώγων και Ολοκληρωμάτων

- $r \rightarrow u \rightarrow a$ (παραγωγίζω)
- $a \rightarrow u \rightarrow r$ (ολοκληρώνω)

Στη φυσική, για να μεταβούμε από ένα μέγεθος σε άλλο, χρησιμοποιούμε τον απειροστικό λογισμό:

- **Παραγωγή ($\frac{d}{dt}$):** Χρησιμοποιείται όταν πηγαίνουμε από τη **Θέση** $\rightarrow$ **Ταχύτητα** $\rightarrow$ **Επιτάχυνση**.
- **Ολοκλήρωση ($\int$):** Χρησιμοποιείται για την αντίστροφη πορεία: **Επιτάχυνση** $\rightarrow$ **Ταχύτητα** $\rightarrow$ **Θέση**.

Ολοκληρώματα & Νόμοι

- $u = \frac{dx}{dt} \Rightarrow dx = u \cdot dt \Rightarrow \int_{x_0}^x dx = \int_0^t u dt \Rightarrow x - x_0 = u(t - 0) \Rightarrow \mathbf{x = x_0 + ut}$
- $a = \frac{du}{dt} \Rightarrow du = a \cdot dt \Rightarrow \int_{u_0}^u du = \int_0^t a dt \Rightarrow u - u_0 = a(t - 0) \Rightarrow \mathbf{u = u_0 + at}$

Δυναμική & Νόμοι του Νεύτωνα

1ος Νόμος (Αδράνεια): Αν η συνισταμένη των δυνάμεων είναι μηδέν ($\Sigma F = 0$), το σώμα παραμένει ακίνητο ή κινείται με σταθερή ταχύτητα (Ε.Ο.Κ.).

2ος Νόμος (Θεμελιώδης): Η συνισταμένη δύναμη ισούται με το γινόμενο της μάζας επί την επιτάχυνση: $\Sigma F = ma$.

3ος Νόμος (Δράση-Αντίδραση): Για κάθε δύναμη δράσης F_{12} υπάρχει μια αντίθετη δύναμη αντίδρασης F_{21} , $F_{12} = -F_{21}$.

Η Ενέργεια στη Μηχανική

1. Κινητική Ενέργεια (K ή T)

Ορισμός: Είναι η ενέργεια που κατέχει ένα σώμα λόγω της κίνησής του

- **Τύπος:** $K = \frac{1}{2}mu^2$
- **Μονάδα μέτρησης:** Joule (J) στο S.I.
- **Συμβολισμοί:**
 - m : Η μάζα του σώματος (kg).
 - u : Το μέτρο της ταχύτητας (m/s).

2. Δυναμική Ενέργεια (U ή V)

Ορισμός: Είναι η ενέργεια που έχει ένα σώμα λόγω της θέσης του σε ένα πεδίο δυνάμεων (π.χ. βαρυτικό).

- **Τύπος (Βαρυτική):** $U = mgh$
- **Συμβολισμοί:**
 - g : Η επιτάχυνση της βαρύτητας ($\approx 9,8 \text{ m/s}^2$).
 - h : Το ύψος από ένα επίπεδο αναφοράς.

3. Μηχανική Ενέργεια ($E_{μηχ}$)

Ορισμός: Το άθροισμα της κινητικής και της δυναμικής ενέργειας ενός σώματος.

- **Τύπος:** $E_{μηχ} = K + U$
- **Αρχή Διατήρησης:** Αν ασκούνται μόνο συντηρητικές δυνάμεις (π.χ. βάρος), τότε η $E_{μηχ}$ παραμένει σταθερή ($E_{αρχ} = E_{τελ}$).

Έργο, Ισχύς και Θ.Μ.Κ.Ε

1. Έργο (W)

Το έργο εκφράζει τη μεταφορά ενέργειας μέσω μιας δύναμης που προκαλεί μετατόπιση. Η μονάδα μέτρησης στο S.I. είναι το **Joule (J)**.

- Σε ευθύγραμμη κίνηση:

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F \, dx$$

- Σε καμπυλόγραμμη κίνηση:

$$W = \int_c F \cdot dr$$

Συμβολισμοί:

- W : Έργο της δύναμης.
- F ή $\vec{F}$: Η δύναμη που ασκείται στο σώμα.
- x_1, x_2 : Η αρχική και η τελική θέση στον άξονα κίνησης.
- $d\vec{r}$: Το διάνυσμα της στοιχειώδους μετατόπισης πάνω στην καμπύλη c .

2. Ισχύς (P)

Η ισχύς ορίζεται ως ο ρυθμός με τον οποίο παράγεται έργο ή μεταφέρεται ενέργεια. Η μονάδα μέτρησης στο S.I. είναι το **Watt (W)**.

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{F \cdot dr}{dt} = F \cdot \frac{dr}{dt} = F \cdot v$$

Συμβολισμοί:

- P : Η ισχύς.
- $\frac{dW}{dt}$: Ο ρυθμός μεταβολής του έργου ως προς τον χρόνο.
- v : Η στιγμιαία ταχύτητα του σώματος.

3. Θεώρημα Έργου - Κινητικής Ενέργειας (Θ.Μ.Κ.Ε.)

Το συνολικό έργο όλων των δυνάμεων που ασκούνται σε ένα σώμα ισούται με τη μεταβολή της κινητικής του ενέργειας.

$$\sum W = \Delta K$$

$$\Rightarrow W_{ολ} = K_{τελ} - K_{αρχ}$$

Συμβολισμοί:

- $\sum W$ ή $W_{ολ}$: Το αλγεβρικό άθροισμα των έργων όλων των δυνάμεων.
- ΔK : Η μεταβολή της κινητικής ενέργειας.
- $K_{αρχ}, K_{τελ}$: Η αρχική και η τελική κινητική ενέργεια του σώματος αντίστοιχα.

Άσκηση

Ένα υλικό σημείο μάζας $m = 1 \text{ kg}$ δέχεται δύναμη $F(t) = -8 \cos 2t \cdot i + 8 \sin 2t \cdot j + 2 \cdot k$. Αν τη χρονική στιγμή $t = 0$ το σημείο Σ διέρχεται από το σημείο $A(2, 0, 3)$ με ταχύτητα $v_0 = -4j - 4k$:

α) Να βρεθεί η εξίσωση του διανύσματος μετατόπισης του Σ , $r(t)$.

β) Να βρεθούν οι χρονικές στιγμές τις οποίες:

i) η ταχύτητά του είναι κάθετη στο διάνυσμα θέσης του.

ii) το Σ απέχει την ελάχιστη απόσταση από την αρχή των αξόνων.

γ) Να υπολογιστεί το έργο της F στο χρονικό διάστημα $t = 0$ έως $t = 3 \text{ sec}$.

δ) Να προσδιοριστεί ο ρυθμός μεταβολής του έργου (ισχύς) της δύναμης F για τυχαίο χρόνο t .

Λύση

$$F(t) = -8 \cos 2t \cdot i + 8 \sin 2t \cdot j + 2 \cdot k$$

$$v_0 = -4j - 4k$$

α) Εύρεση $r(t)$

$$F = m \cdot a \Rightarrow a = \frac{F}{m}$$

$$a(t) = -8 \cos 2t \cdot i + 8 \sin 2t \cdot j + 2 \cdot k$$

$$a(t) = \frac{dv}{dt} \Rightarrow dv = a \cdot dt \Rightarrow \int_{v_0}^v dv = \int_0^t (-8 \cos 2t \cdot i + 8 \sin 2t \cdot j + 2 \cdot k) dt$$

$$v - (-4j - 4k) = [-4 \sin 2t \cdot i - 4 \cos 2t \cdot j + 2t \cdot k]_0^t$$

$$v - (-4j - 4k) = (-4 \sin 2t \cdot i - 4 \cos 2t \cdot j + 2t \cdot k) - (-4j)$$

$$v = -4 \sin 2t \cdot i - 4 \cos 2t \cdot j + 2t \cdot k - 4j + 4k - 4j$$

$$v(t) = -4 \sin 2t \cdot i - 4 \cos 2t \cdot j + (2t - 4) \cdot k$$

Τώρα για τη θέση $r(t)$:

$$v(t) = \frac{dr}{dt} \Rightarrow dr = v(t) \cdot dt$$

$$\int_{2i+0j+3k}^r dr = \int_0^t (-4 \sin 2t \cdot i - 4 \cos 2t \cdot j + (2t - 4) \cdot k) dt$$

$$r - (2i + 0j + 3k) = [2 \cos 2t \cdot i - 2 \sin 2t \cdot j + (t^2 - 4t) \cdot k]_0^t$$

$$r - (2i + 3k) = (2 \cos 2t \cdot i - 2 \sin 2t \cdot j + t^2 - 4t \cdot k) - (2i)$$

$$r(t) = 2 \cos 2t \cdot i - 2 \sin 2t \cdot j + (t^2 - 4t + 3) \cdot k$$

β) Χρονικές στιγμές

i) $v(t) \perp r(t) \Rightarrow v(t) \cdot r(t) = 0 \quad (-4 \sin 2t, -4 \cos 2t, 2t - 4) \cdot (2 \cos 2t, -2 \sin 2t, t^2 - 4t + 3) = 0$

$$-8 \sin 2t \cos 2t + 8 \cos 2t \sin 2t + (2t - 4)(t^2 - 4t + 3) = 0$$

$$2(t - 2)(t - 1)(t - 3) = 0$$

Άρα: $t = 1 \text{ sec}, t = 2 \text{ sec}, t = 3 \text{ sec}$

ii) $|r(t)| = \min$ Όταν $\frac{d|r(t)|}{dt} = 0$:

$$\frac{d}{dt} [(2 \cos 2t)^2 + (-2 \sin 2t)^2 + (t^2 - 4t + 3)^2]^{1/2} = 0$$

$$\frac{d}{dt} [4(\cos^2 2t + \sin^2 2t) + (t^2 - 4t + 3)^2]^{1/2} = 0$$

$$\frac{d}{dt} [4 + (t^2 - 4t + 3)^2]^{1/2} = 0$$

$$\frac{1}{2} [4 + (t^2 - 4t + 3)^2]^{-1/2} \cdot 2(t^2 - 4t + 3) \cdot (2t - 4) = 0$$

Ρίζες: $t = 1, t = 3$ ή $t = 2 \text{ sec}$ (που είναι το ελάχιστο).

γ) Έργο της F ($t = 0$ έως $t = 3$)

$$W = \int_{r(0)}^{r(3)} F \cdot dr = \int_0^3 (-8 \cos 2t, 8 \sin 2t, 2) \cdot (-4 \sin 2t, -4 \cos 2t, 2t - 4) dt$$

$$W = \int_0^3 (32 \sin 2t \cos 2t - 32 \sin 2t \cos 2t + 4t - 8) dt$$

$$W = \int_0^3 (4t - 8) dt = [2t^2 - 8t]_0^3 = (18 - 24) - 0 = -6 \text{ J}$$

δ) Ισχύς P

$$P = F \cdot v = (-8 \cos 2t, 8 \sin 2t, 2) \cdot (-4 \sin 2t, -4 \cos 2t, 2t - 4)$$

$$P = 32 \cos 2t \sin 2t - 32 \sin 2t \cos 2t + 2(2t - 4)$$

$$P = 4t - 8$$