

Διανυσματική Ανάλυση



Θεωρία: Διπλά Ολοκληρώματα (Περίπτωση 1)

1. Ορισμός σε Ορθογώνιο Χωρίο

Όταν το χωρίο ολοκλήρωσης D είναι ένα ορθογώνιο, οι μεταβλητές x και y κυμαίνονται μεταξύ σταθερών ορίων:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$$

Σε αυτή την περίπτωση, το διπλό ολοκλήρωμα της συνάρτησης $f(x, y)$ πάνω στο D μπορεί να υπολογιστεί με δύο τρόπους (διαδοχική ολοκλήρωση), ανάλογα με τη σειρά που επιλέγουμε:

1. Ολοκλήρωση πρώτα ως προς y : $\int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx$
2. Ολοκλήρωση πρώτα ως προς x : $\int_c^d \left[\int_a^b f(x, y) dx \right] dy$

2. Εφαρμογή (Άσκηση)

Εκφώνηση: Να υπολογιστεί το διπλό ολοκλήρωμα $I = \iint_D (x^2 y + y^3) dx dy$, όταν το χωρίο ολοκλήρωσης είναι το ορθογώνιο $D = [0, 1] \times [0, 2]$. (Σημείωση: Αυτό σημαίνει $0 \leq x \leq 1$ και $0 \leq y \leq 2$).

Αναλυτική Λύση:

Βήμα 1: Τοποθέτηση των ορίων Επιλέγουμε να ολοκληρώσουμε πρώτα ως προς y και μετά ως προς x :

$$I = \int_0^1 \left[\int_0^2 (x^2 y + y^3) dy \right] dx$$

Βήμα 2: Εσωτερική Ολοκλήρωση (ως προς y) $\implies I = \int_0^1 \left[\frac{1}{2}x^2y^2 + \frac{1}{4}y^4 \right]_0^2 dx$

(Εδώ αντικαθιστούμε το $y = 2$ και το $y = 0$ μέσα στην παρένθεση): $\implies I = \int_0^1 \left(\frac{1}{2}x^2 \cdot 2^2 + \frac{1}{4} \cdot 2^4 - 0 \right) dx \implies I = \int_0^1 (2x^2 + 4) dx$

Βήμα 3: Εξωτερική Ολοκλήρωση (ως προς x) $\implies I = \left[2\frac{x^3}{3} + 4x \right]_0^1$

(Αντικαθιστούμε το $x = 1$ και το $x = 0$): $\implies I = \left(\frac{2 \cdot 1^3}{3} + 4 \cdot 1 \right) \implies I = \frac{2}{3} + 4$

Τελικό Αποτέλεσμα: $\implies I = \frac{14}{3}$

Θεωρία: Διπλά Ολοκληρώματα (Περίπτωση 2)

1. Ορισμός σε Γενικό Χωρίο

Όταν το χωρίο ολοκλήρωσης D δεν είναι ορθογώνιο, αλλά ορίζεται από δύο συναρτήσεις του x , τότε τα όρια για τη μεταβλητή y είναι συναρτήσεις:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$$

Ο τύπος του διπλού ολοκληρώματος σε αυτή την περίπτωση είναι:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \left[\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy \right] dx$$

2. Εφαρμογή (Άσκηση)

Εκφώνηση: Να υπολογιστεί το διπλό ολοκλήρωμα $I = \iint_D (4xy - y^3) dx dy$, όταν το χωρίο D ορίζεται από τις σχέσεις $0 \leq x \leq 1$ και $x^3 \leq y \leq \sqrt{x}$.

Αναλυτική Λύση:

Βήμα 1: Εσωτερική Ολοκλήρωση (ως προς y) Ολοκληρώνουμε τη συνάρτηση $4xy - y^3$ ως προς y , θεωρώντας το x σταθερό:

$$I = \int_0^1 \left[\int_{x^3}^{\sqrt{x}} (4xy - y^3) dy \right] dx$$

$$\implies I = \int_0^1 \left[2xy^2 - \frac{y^4}{4} \right]_{x^3}^{\sqrt{x}} dx$$

Βήμα 2: Αντικατάσταση Ορίων Αντικαθιστούμε το πάνω όριο ($\sqrt{x}$) και το κάτω όριο (x^3) στη θέση του y :

$$\Rightarrow I = \int_0^1 \left[\left(2x(\sqrt{x})^2 - \frac{(\sqrt{x})^4}{4} \right) - \left(2x(x^3)^2 - \frac{(x^3)^4}{4} \right) \right] dx$$

$$\Rightarrow I = \int_0^1 \left[\left(2x^2 - \frac{x^2}{4} \right) - \left(2x^7 - \frac{x^{12}}{4} \right) \right] dx$$

$$\Rightarrow I = \int_0^1 \left(\frac{7}{4}x^2 - 2x^7 + \frac{1}{4}x^{12} \right) dx$$

Βήμα 3: Εξωτερική Ολοκλήρωση (ως προς x) Ολοκληρώνουμε τώρα ως προς x από 0 έως 1:

$$\Rightarrow I = \left[\frac{7}{12}x^3 - \frac{2}{8}x^8 + \frac{1}{4 \cdot 13}x^{13} \right]_0^1$$

$$\Rightarrow I = \left[\frac{7}{12}x^3 - \frac{1}{4}x^8 + \frac{1}{52}x^{13} \right]_0^1$$

Βήμα 4: Τελικοί Υπολογισμοί Αντικαθιστώντας το $x = 1$:

$$\Rightarrow I = \frac{7}{12} - \frac{1}{4} + \frac{1}{52} = \frac{91 - 39 + 3}{156} = \frac{55}{156}$$

Θεωρία: Διπλά Ολοκληρώματα (Περίπτωση 3)

1. Ορισμός Χωρίου

Σε αυτή την περίπτωση, το χωρίο D ορίζεται από δύο σταθερά όρια για τη μεταβλητή y , ενώ η μεταβλητή x κυμαίνεται ανάμεσα σε δύο συναρτήσεις του y :

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq y \leq d, h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\}$$

Ο τύπος υπολογισμού είναι:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d \left[\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx \right] dy$$

Εκφώνηση: Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $I = \iint_D e^{x/y} dx dy$, όπου $D : 1 \leq y \leq 2$ και $y \leq x \leq y^3$.

Λύση:

Βήμα 1: Τοποθέτηση των ορίων ολοκλήρωσης

$$I = \int_1^2 \left[\int_y^{y^3} e^{x/y} dx \right] dy$$

Βήμα 2: Εσωτερική ολοκλήρωση (ως προς x) $\implies I = \int_1^2 [ye^{x/y}]_y^{y^3} dy$

(Αντικαθιστούμε τα όρια $x = y^3$ και $x = y$ μέσα στην αγκύλη): $\implies I = \int_1^2 (ye^{y^3/y} - ye^{y/y}) dy \implies I = \int_1^2 (ye^{y^2} - ye^1) dy$

Βήμα 3: Εξωτερική ολοκλήρωση (ως προς y) $\implies I = \left[\frac{1}{2}e^{y^2} - \frac{\epsilon}{2}y^2 \right]_1^2$

(Αντικαθιστούμε τα όρια $y = 2$ και $y = 1$): $\implies I = \left(\frac{1}{2}e^{2^2} - \frac{\epsilon}{2} \cdot 2^2 \right) - \left(\frac{1}{2}e^{1^2} - \frac{\epsilon}{2} \cdot 1^2 \right)$
 $\implies I = \frac{1}{2}e^4 - 2e - \left(\frac{\epsilon}{2} - \frac{\epsilon}{2} \right)$

Τελικό Αποτέλεσμα: $\implies I = \frac{1}{2}e^4 - 2e$