

ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΙΙ



● Αμερόληψια

- παράμετρος θ
- ευτιμήτρια $\hat{\theta}_n$

Μια ευτιμήτρια $\hat{\theta}_n$ της παραμέτρου θ είναι αμερόληπτη αν $E(\hat{\theta}_n) = \theta$

● $E(\bar{x}) = \mu$, $\bar{x}$ αμερόληπτη ευτιμήτρια

Απόδειξη

$$E(\bar{x}) = E\left(\frac{1}{n} \sum x_i\right) = \frac{1}{n} E\left(\sum x_i\right) = \frac{1}{n} \underbrace{\left(E(x_1) + \dots + E(x_n)\right)}_{\mu}$$

$$\Rightarrow E(\bar{x}) = \frac{1}{n} (n\mu) = \mu$$

● $E(S^2) = \frac{(n-1)}{n} \sigma^2$, S^2 δεν είναι αμερόληπτη ευτιμήτρια

Απόδειξη

$$E(S^2) = E\left(\frac{1}{n} \sum (x_i - \bar{x})^2\right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (E(x_i^2) - E(\bar{x}^2))$$
$$\stackrel{①②}{=} \frac{1}{n} \left(n\sigma^2 + \mu^2 - \frac{\sigma^2}{n} - \mu^2 \right) = \sigma^2 - \frac{\sigma^2}{n} = \sigma^2 \frac{(n-1)}{n}$$

• $\text{Var}(x_i) = \sigma^2 = E(x_i^2) - (E(x_i))^2 \Rightarrow \sigma^2 = E(x_i^2) - \mu^2 \Rightarrow E(x_i^2) = \sigma^2 + \mu^2$ ①

• $\text{Var}(\bar{x}) = \frac{\sigma^2}{n} = E(\bar{x}^2) - (E(\bar{x}))^2 \Rightarrow \frac{\sigma^2}{n} = E(\bar{x}^2) - \mu^2 \Rightarrow E(\bar{x}^2) = \frac{\sigma^2}{n} + \mu^2$ ②

● Αποτελεσματικότητα



Σημειώσεις - Λυμένα θέματα

e-students.gr

© 698 93 94 741

Έστω 2 αμερόληπτες εστιμήτριες της θ που είναι $\hat{\theta}_1$ και $\hat{\theta}_2$ (δηλαδή ισχύει $E(\hat{\theta}_1) = E(\hat{\theta}_2) = \theta$)

Λέμε ότι η $\hat{\theta}_1$ έχει μεγαλύτερη σχετική αποτελεσματικότητα από $\hat{\theta}_2$ αν $\text{Var}(\hat{\theta}_1) < \text{Var}(\hat{\theta}_2)$

● Συνέπεια

$$\text{Αν } \lim_{n \rightarrow \infty} E(\hat{\theta}_n) = \theta$$

$$\text{και } \lim_{n \rightarrow \infty} \text{Var}(\hat{\theta}_n) = 0$$

Τότε η $\hat{\theta}_n$ είναι συνεπής εστιμήτρια της θ .



Σημειώσεις - Λυμένα θέματα

e-students.gr

© 698 93 94 741



Τυχαία μεταβλητή ακολουθεί κανονική κατανομή $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ και τυχαίο δείγμα $x_1, x_2, \dots, x_n$

Η εκτιμήτρια $\hat{\theta}_n = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n x_i$ είναι συνεπής; α' αμερόληπτη;

Λύση

$$E(\hat{\theta}_n) = E\left(\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n x_i\right) = \frac{1}{n-1} (E(x_1) + \dots + E(x_n))$$

$$= \frac{1}{n-1} n\mu = \frac{n\mu}{n-1} \neq \mu \quad \text{Δελ} \quad \text{είναι αμερόληπτη}$$

$$\bullet \lim_{n \rightarrow \infty} E(\hat{\theta}_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\mu}{n-1} \stackrel{\infty}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{1} = \mu \quad (1)$$

$$\bullet \lim_{n \rightarrow \infty} \text{Var}(\hat{\theta}_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(n-1)^2} \sum \text{Var}(x_i) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\sigma^2}{(n-1)^2}$$

$$\stackrel{\infty}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sigma^2}{2(n-1)} = 0 \quad (2)$$

(1) & (2) συνεπής



● Εφαρμοχή

ρ είναι αμερόληπτη? $E(\hat{\rho}) = \frac{E(x)}{n} = \frac{n\rho}{n} = \rho$

ΘΕΜΑ (2017)

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

Η πιο αποτελεσματική από τις παρακάτω
επιτηρήσεις του μ είναι:

α) $\frac{X_1 + 3X_2}{4}$

γ) $\frac{10X_1 - 2X_2}{8}$

ε) $\frac{X_1 + 2X_2}{6}$

β) $\frac{3X_1 - X_2}{2}$

δ) $\frac{4X_1 + 6X_2}{10}$

Λύση

$$E\left(\frac{X_1 + 3X_2}{4}\right) = \frac{1}{4}(\mu + 3\mu) = \frac{4\mu}{4} = \mu \quad \text{αμερόλητη}$$

$$E\left(\frac{3X_1 - X_2}{2}\right) = \frac{1}{2}(3\mu - \mu) = \mu \quad \text{αμερόλητη}$$

$$E\left(\frac{10X_1 - 2X_2}{8}\right) = \frac{1}{8}(10\mu - 2\mu) = \mu \quad \text{αμερόλητη}$$

$$E\left(\frac{4X_1 + 6X_2}{10}\right) = \frac{1}{10}(4\mu + 6\mu) = \mu \quad \text{αμερόλητη}$$

$$E\left(\frac{X_1 + 2X_2}{6}\right) = \frac{1}{6}(\mu + 2\mu) = \frac{3\mu}{6} = \frac{\mu}{2} \quad \text{όχι αμερόλ.}$$