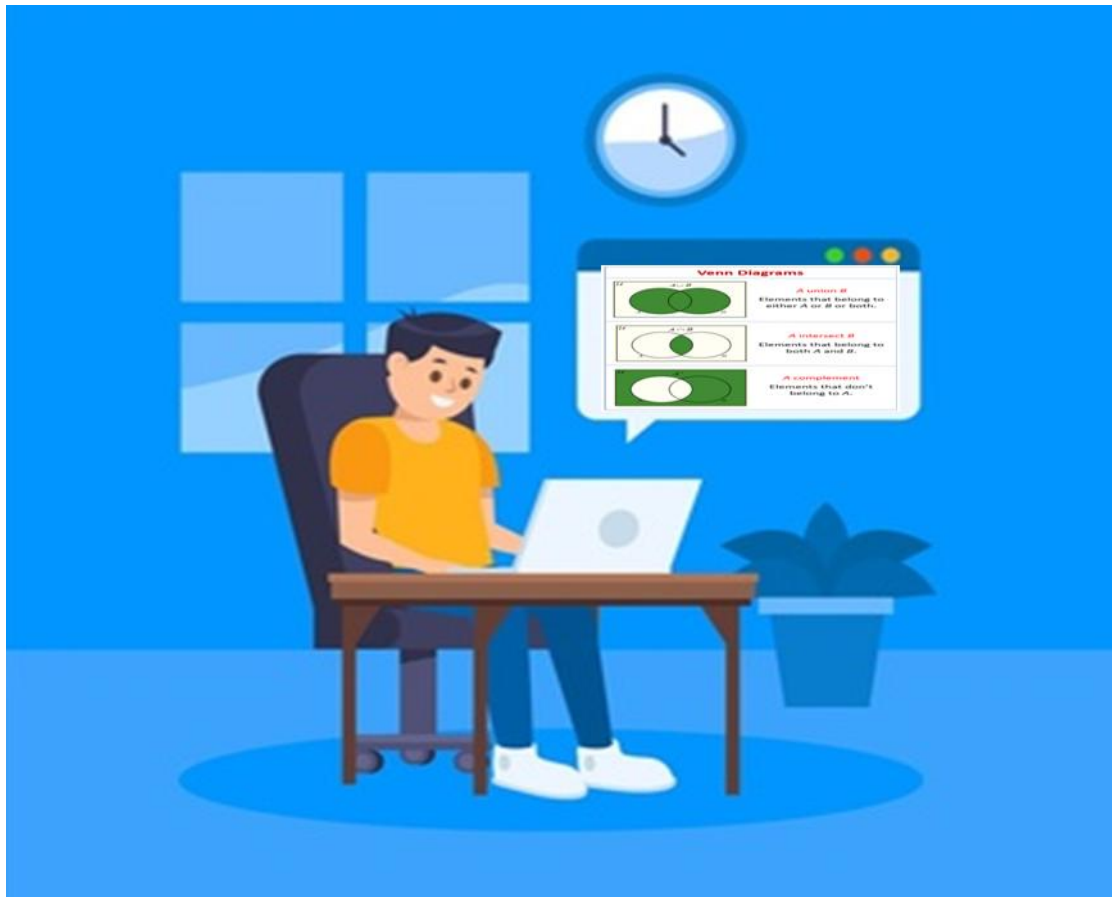


ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι



● Παράγωγος

● Παράγωγος της f στο x_0 και συμβολίζεται $f'(x_0)$

● Η εφαπτομένη ε της C_f στο x_0 είναι $\varepsilon: y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$

● Παράγωγοι βασικών συναρτήσεων

$$(c)' = 0, (x)' = 1$$

$$(x^\Gamma)' = \Gamma x^{\Gamma-1}, x > 0$$

$$(x^v)' = v x^{v-1}$$

$$(x^x)' = x^x (\log x + 1)$$

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\sin^{-1} x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(\cos^{-1} x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

$$(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} = -\csc^2 x$$

$$(\tan^{-1} x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$(e^x)' = e^x$$

$$(\cot^{-1} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$(a^x)' = a^x \ln a$$

● Κανόνες Παράγωγησης



Εμπειρίες - Ανεμένα Θέματα

e-students.gr

☎ 698 93 94 741

$$(cf(x))' = c \cdot f'(x)$$

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$$

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

$$\left(\frac{1}{g(x)}\right)' = -\frac{g'(x)}{g^2(x)}$$

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

$$(f^v(x))' = v f^{v-1}(x) f'(x)$$



Εμπειρίες - Ανεμένα Θέματα

e-students.gr

☎ 698 93 94 741



● Εφαρμογή

Να υπολογιστούν οι παράγωγοι των συναρτήσεων

$$i) f(x) = \frac{1}{(1-x^2)(1+x^4)}$$

$$ii) f(x) = \cos^4 x$$



Λύση

$$i) f'(x) = \left(\frac{1}{(1-x^2)(1+x^4)} \right)' = \frac{-[-2x(1+x^4) - (1-x^2)4x^3]}{[(1-x^2)(1+x^4)]^2}$$

$$= \frac{6x^5 - 4x^3 + 2x}{[(1-x^2)(1+x^4)]^2}$$

$$ii) f'(x) = (\cos^4 x)' = 4\cos^3 x (\cos x)'$$
$$= -4\cos^3 x \cdot \sin x$$

● Η παράγωγος συμβολίζεται με $f'(x)$, $\frac{dy}{dx}$ ή $\frac{df}{dx}$

● Δεύτερη παράγωγος : $\frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d^2 y}{dx^2} = f''(x) = y''$

● Τρίτη παράγωγος : $\frac{d}{dx} \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right) = \frac{d^3 y}{dx^3} = f'''(x) = y'''$



Σημειώσεις - Λυμένα θέματα

e-students.gr

☎ 698 93 94 741

● Παράγωγος σύνθετης συνάρτησης

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx}$$



Σημειώσεις - Λυμένα θέματα

e-students.gr

☎ 698 93 94 741

● Παράγωγος στην περίπτωση που η συνάρτηση δίνεται σε παραμετρική μορφή $x(t)$ ή $y(t)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}$$

και Δεύτερη Παράγωγο $\frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{dy'}{dx} \frac{dx'}{dt}$

όπου $y' = dy/dx$

● Εφαρμογή (Δεύτερη Παράγωγος)

Να υπολογιστεί η Πρώτη και η Δεύτερη Παράγωγος της $f(x) = x^3 \tan x$

Λύση

$$f'(x) = (x^3 \tan x)' = (x^3)' \tan x + x^3 (\tan x)'$$

$$f'(x) = 3x^2 \tan x + x^3 \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$f''(x) = (3x^2 \tan x + x^3 \frac{1}{\cos^2 x})'$$



Εκπαιδευτικές - Ασκήσεις Θέματα

e-students.gr

© 698 93 94 741

$$f''(x) = (3x^2 \tan x)' + (x^3 \frac{1}{\cos^2 x})'$$

$$f''(x) = (3x^2)' \tan x + 3x^2 (\tan x)' + (x^3)' \frac{1}{\cos^2 x} - (x^3) \frac{(\cos^2 x)'}{(\cos^2 x)^2}$$

$$f''(x) = 6x \tan x + \frac{3x^2}{\cos^2 x} + \frac{3x^2 \sin 2x}{\cos^4 x} + \frac{x^3 \sin 2x}{\cos^4 x}$$

● Εφαρμογή (Παραμετρική)

Δίνονται $x(t) = t - t^2$, $y(t) = t - t^3$

$\frac{dy}{dx} = ?$

Λύση

$$\frac{dx}{dt} = (t - t^2)' = 1 - 2t, \quad \frac{dy}{dt} = (t - t^3)' = 1 - 3t^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{1 - 3t^2}{1 - 2t}$$

Ολοκλήρωση



Σημειώσεις - Λυμένα θέματα

e-students.gr

698 93 94 741

Αόριστο

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

Ορισμένο

$$\int_a^b f(x) dx = \Phi(x) \Big|_a^b = \Phi(b) - \Phi(a)$$

Βασικά ολοκληρώματα

$$\int 0 dx = C$$

$$\int 1 dx = x + C$$

$$\int x^v dx = \frac{x^{v+1}}{v+1} + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$$



Σημειώσεις - Λυμένα Θέματα

e-students.gr

☎ 698 93 94 741

$$\int -\frac{1}{\sin^2 x} dx = \cot x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$$

$$\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arccos x + C$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C$$

$$\int -\frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arccot} x + C$$



Σημειώσεις - Λυμένα Θέματα

e-students.gr

☎ 698 93 94 741

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx = \operatorname{arcsec} x + C$$

$$\int \frac{-1}{x\sqrt{x^2-1}} dx = \operatorname{arccsc} x + C$$

$$\int \cosh x dx = \sinh x + C$$

$$\int \sinh x dx = \cosh x + C$$

$$\int \frac{1}{\cosh^2 x} dx = \tanh x + C$$



Σημειώσεις - Λυμένα θέματα

e-students.gr

☎ 698 93 94 741

$$\int -\frac{1}{\sinh^2 x} dx = \coth x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} dx = \operatorname{arcsinh} x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} dx = \operatorname{arccosh} x + C$$

$$\int \frac{1}{1-x^2} dx = \operatorname{arctanh} x + C, |x| < 1$$

$$\int -\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}} dx = \operatorname{arcsech} x + C$$

$$\int -\frac{1}{|x|\sqrt{1+x^2}} dx = \operatorname{arccsch} x + C$$



Σημειώσεις - Λυμένα θέματα

e-students.gr

☎ 698 93 94 741

Εφαρμογή



Σημειώσεις - Λογμένα Θέματα

e-students.gr

☎ 698 93 94 741

Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα

i) $\int \sqrt{x} dx$

ii) $\int \left(\frac{1-x}{x} \right)^2 dx$



Σημειώσεις - Λογμένα Θέματα

e-students.gr

☎ 698 93 94 741

Λύση

$$\begin{aligned} \text{i) } \int \sqrt{x} dx &= \int x^{1/2} dx = \frac{x^{1/2+1}}{1/2+1} + C \\ &= \frac{2}{3} x^{3/2} + C \end{aligned}$$

$$\text{ii) } \int \left(\frac{1-x}{x} \right)^2 dx = \int \frac{(1-x)^2}{x^2} dx$$

$$\int \frac{1-2x+x^2}{x^2} dx = \int \frac{1}{x^2} dx - \int \frac{2x}{x^2} dx + \int \frac{x^2}{x^2} dx$$

$$= \int \frac{1}{x^2} dx - \int \frac{2}{x} dx + \int dx$$

$$= -\frac{1}{x} - 2 \ln|x| + x + C$$

● Μέθοδοι Ολοκλήρωσης



Σημειώσεις - Λυμένα Θέματα

e-students.gr

☎ 698 93 94 741

1) Παραγοντική μέθοδος (ολοκλήρωση κατά παράγοντα)

$$\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx$$

$$\text{ή } \int u(x)dv(x) = u(x)v(x) - \int v(x) \cdot du(x)$$

● Εφαρμογή

$$\int \ln x \, dx = ?$$



Σημειώσεις - Λυμένα Θέματα

e-students.gr

☎ 698 93 94 741

$$\begin{aligned} \int (x)' \ln x \, dx &\stackrel{\text{Π.Ο}}{=} x \cdot \ln x - \int x (\ln x)' \, dx \\ &= x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} \, dx \\ &= x \ln x - \int 1 \, dx \\ &= x \ln x - x + C \end{aligned}$$

Ισορροπία αγοράς



Σημειώσεις - Λογμένα Θέματα

e-students.gr

© 698 93 94 741

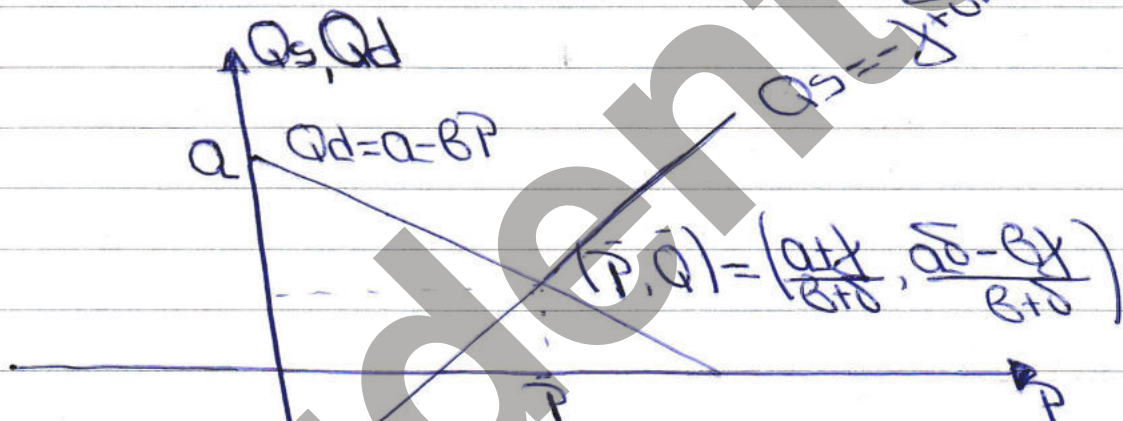
Q_d : Ητούμενη Ποσότητα αγαθού

Q_s : Προσφερόμενη Ποσότητα αγαθού

P : Τιμή

$$Q_d = a - bP$$
$$Q_s = -\gamma + \delta P$$

$\Rightarrow$ ισορροπία $Q_d = Q_s$



Σημειώσεις - Λογμένα Θέματα

e-students.gr

© 698 93 94 741

Το σημείο ισορροπίας δίνεται:

$$O_{ns} = (\bar{P}, \bar{Q})$$

● Εφαρμογή

Οι συναρτήσεις προσφοράς και ζήτησης ενός αγαθού δίνονται από $P = -2Q_d + 50$
 $P = 0,5Q_s + 25$ όπου τα P, Q_d, Q_s αντίστοιχα η τιμή, η ποσότητα που ζητείται και η ποσότητα που προσφέρεται. Να προσδιοριστεί η τιμή και η ποσότητα ισορροπίας.

Λύση

$$P = -2Q_d + 50 \Rightarrow -2Q_d = P - 50 \Rightarrow Q_d = -\frac{1}{2}P + \frac{50}{2}$$

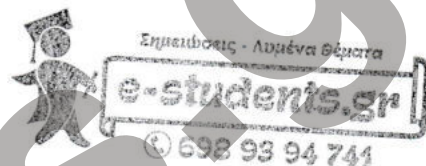
$$P = 0,5Q_s + 25 \Rightarrow 0,5Q_s = P - 25 \Rightarrow Q_s = 2P - 50$$

$$Q_d = Q_s \Rightarrow -\frac{1}{2}P + 25 = 2P - 50$$

$$\Rightarrow 2P + \frac{1}{2}P = 25 + 50$$

$$\Rightarrow 2,5P = 75 \Rightarrow P = 30$$

$$Q = 2 \cdot 30 - 50 = 10$$



● Εφαρμογή

Δίνονται οι συναρτήσεις προσφοράς και ζήτησης $Q_s = 4P - 1$ $Q_d = 4 - P^2$. Να βρεθεί το σημείο ισορροπίας.

Λύση

$$Q_s = Q_d \Rightarrow 4P - 1 = 4 - P^2 \Rightarrow P^2 + 4P - 1 - 4 = 0$$

$$\Rightarrow P^2 + 4P - 5 = 0 \quad \begin{cases} P = 1 \\ P = -5 \text{ αληθ.} \end{cases}$$

$$P = 1$$

$$Q = 4 \cdot 1 - 1 = 3$$

