

Γραμμική Άλγεβρα και Αναλυτική Γεωμετρία



● Πινάκας



Εμπειρίες - Απρόβλεπτα Θέματα

e-students.gr

© 698 93 94 741

Πίνακας ονομάζουμε μια ορθογώνια διάταξη $m \times n$ αριθμών σε m γραμμές και n στήλες.

$$A_{m \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & & & a_{mn} \end{bmatrix}$$



Εμπειρίες - Απρόβλεπτα Θέματα

e-students.gr

© 698 93 94 741

● Τετραγωνικός Πίνακας

Περιέχει τον ίδιο αριθμό γραμμών και στήλων, είναι δηλαδή μέγεθος $n \times n$ με $n \in \mathbb{N}$.

Παράδειγμα: $A_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

● Μοναδιαίος Πίνακας

$$I_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$I_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ΚΑΤΗΧΟΡΙΕΣ ΤΕΤΡΑΧΥΜΑΤΩΝ ΤΡΙΩΝΩΝ

→ ΔΙΑΓΩΝΙΩΣ

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}$$



Σημειώσεις - Ασκήσεις Θέματα

e-students.gr

© 698 93 94 741

→ Άνω Τριγωνικός

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}$$

→ Κάτω Τριγωνικός

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$



Σημειώσεις - Ασκήσεις Θέματα

e-students.gr

© 698 93 94 741

→ Συμμετρικός ($a_{ij} = a_{ji}$)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 8 \\ 5 & 3 & -2 \\ 8 & -2 & 9 \end{bmatrix}$$

$$(A^T = A)$$

→ Αντισυμμετρικός ($a_{ij} = -a_{ji}$)

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 5 & -3 \\ -5 & 0 & 9 \\ 3 & -9 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(A^T = -A)$$



Σημειώσεις - Λογμένα Θέματα

e-students.gr

© 698 93 94 741

→ Ανάστροφος Πίνακας A^T

Εστω ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -6 \\ 1 & 9 \end{bmatrix}$

τότε ο ανάστροφος του A είναι

$$A^T = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & -6 & 9 \end{bmatrix}$$



Σημειώσεις - Λογμένα Θέματα

e-students.gr

© 698 93 94 741

→ Ορθογώνιος Πίνακας

Ορθογώνιος λέγεται ο $n \times n$ τετραγωνικός πίνακας για τον οποίο ισχύει $A^T \cdot A = A \cdot A^T = I$



Σημειώσεις - Λογμένα Θέματα

e-students.gr

© 698 93 94 741

→ Κανονικός Πίνακας

Κανονικός λέγεται ο $n \times n$ τετραγωνικός πίνακας για τον οποίο ισχύει $AA^T = A^T A = I$



Ενός τετραγωνικού πίνακα A προκύπτει από το άθροισμα των στοιχείων που απρέχουν την διαγώνιο του A .

π.χ

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 2 & -6 & 7 \\ 1 & 9 & -2 \end{bmatrix}$$



$$\text{tr}(A) = 3 + (-6) + (-2) = -5.$$

Πρόσθεση Πινάκων

$$A+B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 5 & 3 \\ 7 & -6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 10 \\ 6 & -3 \\ -8 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+3 & -2+10 \\ 5+6 & 3+(-3) \\ 7+(-8) & -6+3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 11 & 0 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$$

Πολλαπλασιασμός Πινάκων



Σημειώσεις - Λυμένα Θέματα

e-students.gr

© 698 93 94 741

Π.χ

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 & 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 \\ 3 \cdot 0 + 4 \cdot 1 & 3 \cdot 2 + 4 \cdot 1 \end{bmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 10 \end{bmatrix}$$



Σημειώσεις - Λυμένα Θέματα

e-students.gr

© 698 93 94 741

Παρατήρηση :

- 1) $A \cdot B \neq B \cdot A$
- 2) $A_{2 \times 2} \cdot B_{2 \times 3} = AB_{2 \times 3}$

Πολλαπλασιασμός αριθμού - Πίνακα

Π.χ

$$3 \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 5 & 3 \\ 7 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \cdot 1 & 3 \cdot (-2) \\ 3 \cdot 5 & 3 \cdot 3 \\ 3 \cdot 7 & 3 \cdot (-6) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ 15 & 9 \\ 21 & -18 \end{bmatrix}$$

● Ορίσματα det n 1)

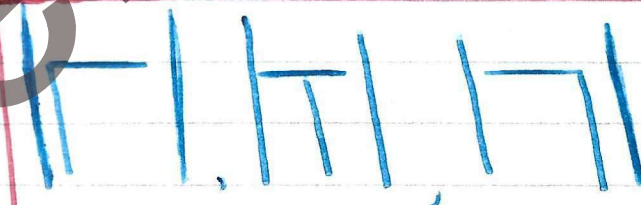
Δευτερός τάξης Ορίσματα

$$A_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 5 \cdot 4 - 3 \cdot 2 = 14$$

Τρίτης τάξης Ορίσματα

$$A_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$



$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \underset{\text{Αλλαγή πρόσημου}}{\underset{\text{Τρόπος}}{1}} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 1(2 \cdot 3 - 1 \cdot 2) - 3[(-1) \cdot 3 - 1 \cdot 4] + 2[(-1) \cdot 2 - 2 \cdot 4]$$

$$= 1(6 - 2) - 3(-3 - 4) + 2(-2 - 8)$$

$$= 1(4) - 3(-7) + 2(-10) = 4 + 21 - 20 = 5.$$

Ορίσμος $n \times m$ Πινάκας

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & & & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$



$$\det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} A'_{ij}$$

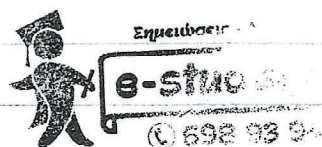
Εφαρμογή

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & -2 \\ 4 & -3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$



$$\det(A) = 1 \begin{vmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \\ -3 & 0 & 2 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \\ 4 & 0 & 2 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & -2 \\ 4 & -3 & 2 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & 1 \\ 4 & -3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \cdot (-16) - 2 \cdot 30 + 2(-8) - 3 \cdot (13)$$



$$= -16 - 60 - 16 - 39 = \underline{\underline{-131}}$$

● Πρόταση 1

Αντιστοίχοι $n \times n$ πίνακες έχουν την ίδια ορίζουσα $\det A = \det A^T$

● Πρόταση 2



Εμπειρίες - Λογμένα Θέματα

e-students.gr

© 698 93 94 741

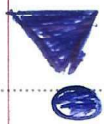
1. Αν ο πίνακας A έχει μια μηδενική γραμμή (ή στήλη) τότε $\det A = 0$
2. Αν ο πίνακας A έχει δύο ίσες γραμμές (ή στήλες) τότε $\det A = 0$
3. Αν ο πίνακας A είναι ανώγλιων (ή κατώγλιων) τότε η ορίζουσα του A είναι το γινόμενο των διαγωνίων στοιχείων
4. Αν ο πίνακας B προκύπτει από τον A με πολλαπλασιασμό με k γραμμής (ή στήλης) με ένα k τότε $\det B = k \det A$



Εμπειρίες - Λογμένα Θέματα

e-students.gr

© 698 93 94 741



Ένας πίνακας A ονομάζεται ιδιάλων ή μη ομαλός αν $\det A = 0$ και ονομάζεται ομαλός ή μη ιδιάλων αν $\det A \neq 0$



Σημειώσεις - Λυμένα θέματα

e-students.gr

☎ 698 93 94 741

e-students.gr

● Αντίστροφος Πίνακας



A^{-1}

Αντίστροφος 2x2

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \quad A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Π.χ

Έστω ο Πίνακας $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$

Ποιος ο αντίστροφος $A^{-1} = ?$

1^{ον}

$$|A| = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 5 \cdot 2 - 3 \cdot 4 = 10 - 12 = -2$$



$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 5 \end{bmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & \frac{3}{2} \\ 2 & -\frac{5}{2} \end{bmatrix}$$

● Αντίστροφος του nxn Πίνακα

- κατασκευάζουμε τον πίνακα S

$$S = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

- Βρίσκουμε τον αντίστροφο του S

$$\text{adj}(A) = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\bullet A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \text{adj}(A) = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

● ΑΝΤΙΣΤΡΕΪΜΟΣ ΠΙΝΑΚΑΣ 3x3

$$\underline{\underline{A^{-1}}}$$

● Εφαρμογή

Να βρεθεί ο αντιστρέψιμος πίνακας του A

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 6 \\ 7 & -5 & -4 \end{pmatrix}$$



Σημειώσεις - Λυμένα θέματα

e-students.gr

© 698 93 94 741

Λύση

1^{ον} : Υπολογίζω την ορίζουσα

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 6 \\ 7 & -5 & -4 \end{vmatrix}$$



Σημειώσεις - Λυμένα θέματα

e-students.gr

© 698 93 94 741

2^{ον} : Φτιάχνω τον πίνακα C

$$C = \begin{bmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ -5 & -4 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 7 & -4 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 7 & -5 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -5 & -4 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & -4 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 7 & -5 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 6 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

Σημειώσεις - Λυμένα θέματα

e-students.gr

© 698 93 94 741

$$C = \begin{pmatrix} 34 & 46 & 2 \\ -10 & -18 & 5 \\ 2 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$



Σημειώσεις - Λυμένα θέματα

e-students.gr

☎ 698 93 94 741

3^{ον} & φτιάχνω πίνακα C^T

$$C^T = \begin{pmatrix} 34 & -10 & 2 \\ 46 & -18 & -4 \\ 2 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$



Σημειώσεις - Λυμένα θέματα

e-students.gr

☎ 698 93 94 741

4^{ον} & φτιάχνω τον αντίστροφο
πίνακα A^{-1}

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot C^T = \frac{1}{38} \begin{bmatrix} 34 & -10 & 2 \\ 46 & -18 & -4 \\ 2 & 5 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 34/38 & -10/38 & 2/38 \\ 46/38 & -18/38 & -4/38 \\ 2/38 & 5/38 & -1/38 \end{bmatrix}$$



Σημειώσεις - Λυμένα θέματα

e-students.gr

☎ 698 93 94 741

2ον: Βρίσκω τα ιδιοδιανύσματα

• Για την ιδιοτιμή $\lambda_1 = -1$

$$(A - \lambda_1 I) \cdot x = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 - (-1) & 2 \\ 2 & 1 - (-1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 2x_1 + 2x_2 &= 0 \\ 2x_1 + 2x_2 &= 0 \end{aligned} \Rightarrow x_1 = -x_2$$

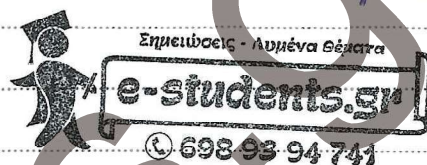
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

• Για την ιδιοτιμή $\lambda_2 = 3$

$$(A - \lambda_2 I) \cdot x = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 - 3 & 2 \\ 2 & 1 - 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{aligned} -2x_1 + 2x_2 &= 0 \\ 2x_1 - 2x_2 &= 0 \end{aligned} \Rightarrow x_1 = x_2$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$



● Εφαρμογή για 3x3 Πινάκω

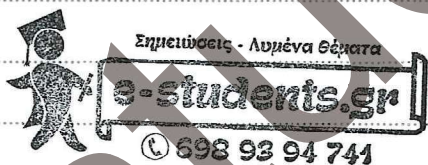
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$



1^η: Βρίσκειν Ιδιοτιμές

$$|A - \lambda I| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 0-\lambda & 0 & -2 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & -2 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda - \lambda \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$



$$-2 \begin{vmatrix} 1 & 2-\lambda \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow -\lambda[(2-\lambda)(3-\lambda) - 0] - 2[1 \cdot 0 - (2-\lambda) \cdot 1] = 0$$

$$\Rightarrow -\lambda(2-\lambda)(3-\lambda) + 2(2-\lambda) = 0$$

$$\Rightarrow (2-\lambda)[- \lambda(3-\lambda) + 2] = 0$$

$$\bullet 2 - \lambda = 0$$

$$\lambda_1 = 2$$

$$\bullet -3\lambda + \lambda^2 + 2 = 0$$

$$\Delta = 9 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 1$$

$$\lambda = \frac{3 \pm 1}{2} = 2$$

$$\lambda = \frac{3 - 1}{2} = 1$$



Άρα οι ιδιοτιμές είναι $\lambda_1 = 1$

και $\lambda_{2,3} = 2$

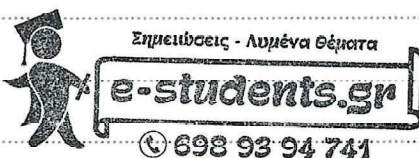


2^ο: Βρίσκω ιδιοδιανύσματα

• Για ιδιοτιμή $\lambda_1 = 1$

$$(A - \lambda_1 I) \cdot x = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & 2-1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3-1 \end{pmatrix} \cdot x = 0$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$



$$-1x_1 + 0x_2 + (-2)x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = -2x_3$$

$$1x_1 + 1x_2 + 1x_3 = 0 \Rightarrow -2x_3 + x_2 + x_3 = 0$$

$$\Rightarrow x_2 = x_3$$

$$1x_1 + 1x_2 + 2x_3 = 0$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x_3 \\ x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

• Για ιδιοτιμή $\lambda_3 = 2$

$$(A - \lambda_3 I)x = 0$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0-2 & 0 & -2 \\ 1 & 2-2 & 1 \\ 1 & 0 & 3-2 \end{pmatrix} \cdot x = 0$$



$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

$$-2x_1 + 0x_2 + (-2)x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = -x_3$$

$$1x_1 + 0x_2 + 1x_3 = 0$$

$$1x_1 + 0x_2 + 1x_3 = 0$$



$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$



e-students.gr