

Σημείο στο Χώρο – Ευθεία Γραμμή

Σημείο στο χώρο

Ένα σημείο P στο χώρο ορίζεται από τρεις συντεταγμένες:

$$P(x, y, z), \quad x, y, z \in \mathbb{R}$$

Απόσταση δύο σημείων

Αν $A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2)$:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Μέσο ευθύγραμμου τμήματος

Το μέσο M του τμήματος AB :

$$M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$$

Ευθεία γραμμή στο χώρο

Η ευθεία ορίζεται από ένα σημείο και τη διεύθυνσή της.

Διανυσματική μορφή

Αν η ευθεία περνάει από $A(x_0, y_0, z_0)$ με διεύθυνση $\vec{u} = (a, b, c)$:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{u}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Παραμετρικές εξισώσεις

$$x = x_0 + at, \quad y = y_0 + bt, \quad z = z_0 + ct, \quad t \in \mathbb{R}$$

Συμμετρικές εξισώσεις

(αν $a, b, c \neq 0$):

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

Σχέσεις ευθειών

- Παράλληλες: ίδια ή πολλαπλάσια διανύσματα διεύθυνσης.
- Κάθετες: $\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = 0$.
- Συνευθειακά σημεία: τα διανύσματα $\vec{AB}, \vec{AC}$ είναι παράλληλα.



Σημειώσεις - Λυμένα θέματα

e-students.gr

☎ 698 93 94 741

Απόσταση σημείου από ευθεία

Αν $P(x_1, y_1, z_1)$, ευθεία με σημείο $A(x_0, y_0, z_0)$ και διεύθυνση $\vec{u} = (a, b, c)$:

$$d(P, \varepsilon) = \frac{||\vec{AP} \times \vec{u}||}{||\vec{u}||}$$

Γωνία δύο ευθειών

Αν οι διευθύνσεις είναι $\vec{u}_1, \vec{u}_2$:

$$\cos \theta = \frac{|\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2|}{||\vec{u}_1|| \cdot ||\vec{u}_2||}$$

**Άσκηση 1**

Να βρείτε εξίσωση ευθείας που περνάει από $A(1, -1, 2)$ με διεύθυνση $\vec{u} = (2, 1, -1)$.

Λύση

Παραμετρονικές εξισώσεις

$$\left. \begin{aligned} x &= x_0 + at \Rightarrow x = 1 + 2t \\ y &= y_0 + bt \Rightarrow y = -1 + 1t \\ z &= z_0 + ct \Rightarrow z = 2 - 1t \end{aligned} \right\} \Rightarrow (x, y, z) = (1 + 2t, -1 + 1t, 2 - 1t)$$

Άσκηση 2

Υπολογίστε την απόσταση του σημείου $P(2, 3, 4)$ από την ευθεία που διέρχεται από

$A(1, 0, 0)$ με διεύθυνση $\vec{u} = (1, 1, 1)$.

Λύση

Απόσταση σημείου από ευθεία

$$d(P, \epsilon) = \frac{|\vec{AP} \times \vec{u}|}{|\vec{u}|}, \quad \vec{AP} = (1, 3, 4)$$

$$\vec{AP} \times \vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \vec{i}(3 \cdot 1 - 4 \cdot 1) - \vec{j}(1 \cdot 1 - 4 \cdot 1) + \vec{k}(1 \cdot 1 - 3 \cdot 1) \\ = -1\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}$$

$$\left. \begin{aligned} |\vec{AP} \times \vec{u}| &= \sqrt{(-1)^2 + 3^2 + (-2)^2} = \sqrt{14} \\ |\vec{u}| &= \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3} \end{aligned} \right\} \Rightarrow d(P, \epsilon) = \frac{\sqrt{14}}{\sqrt{3}}$$

