

Γενικά Μαθηματικά- Βιοστατιστική



Παράγωγοι Συναρτήσεων



Βασικοί τύποι παραγώγων

1. Παράγωγος σταθερής συνάρτησης

Αν $f(x)=c$, όπου c είναι σταθερός αριθμός, τότε:

$$f'(x) = 0$$

2. Παράγωγος της συνάρτησης $f(x)=x$

$$f'(x) = 1$$

3. Παράγωγος δύναμης του x

Αν $f(x)=x^n$, τότε:

$$f'(x) = n x^{n-1}$$

4. Παράγωγος εκθετικής συνάρτησης

$$(e^x)' = e^x$$

$$(a^x)' = a^x \ln a$$

5. Παράγωγος λογαριθμικής συνάρτησης

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

6. Παράγωγοι τριγωνομετρικών συναρτήσεων

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

7. Παράγωγοι αντίστροφων τριγωνομετρικών συναρτήσεων

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

! Κανόνες παραγώγισης

1. Κανόνας σταθερού πολλαπλασίου

Αν $f(x) = c \cdot g(x)$, τότε:

$$f'(x) = c \cdot g'(x)$$

Παράδειγμα:

Να βρεθεί η παράγωγος της $f(x) = 5x^3$

$$f'(x) = (5x^3)' = 5(x^3)' = 5 \cdot 3 \cdot x^2$$

2. Κανόνας αθροίσματος ή διαφοράς

Αν $f(x) = g(x) \pm h(x)$, τότε:

$$f'(x) = g'(x) \pm h'(x)$$

Παράδειγμα:

Να βρεθεί η παράγωγος της $f(x) = x^3 + 2x^2 - 5x + 7$

$$f'(x) = (x^3 + 2x^2 - 5x + 7)' = (x^3)' + (2x^2)' - (5x)' + (7)'$$

$$= (x^3)' + 2(x^2)' - 5(x)' + (7)' = 3x^2 + 2 \cdot 2 \cdot x - 5 \cdot 1 + 0$$

$$\Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 4x - 5$$

3. Κανόνας γινομένου

Αν $f(x) = g(x) \cdot h(x)$, τότε:

$$f'(x) = g'(x) h(x) + g(x) h'(x)$$

Παράδειγμα:

Να βρεθεί η παράγωγος της $f(x) = x^2 \sin x$

$$f'(x) = (x^2 \sin x)' = (x^2)' \cdot (\sin x) + (x^2) \cdot (\sin x)'$$

$$\Rightarrow f'(x) = 2x \cdot \sin x + x^2 \cdot \cos x$$

4. Κανόνας πηλίκου

Αν $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$, τότε:

$$f'(x) = \frac{g'(x)h(x) - g(x)h'(x)}{[h(x)]^2}$$

Παράδειγμα:

Να βρεθεί η παράγωγος της $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x - 1}$

$$f'(x) = \left(\frac{x^2 + 1}{x - 1} \right)' = \frac{[(x^2 + 1)'(x - 1) - (x^2 + 1)(x - 1)']}{(x - 1)^2}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{[2x^2 - 2x - x^2 - 1]}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x - 1}{(x-1)^2}$$

5. Κανόνας αλυσίδας (σύνθετη συνάρτηση)

Αν $f(x) = g(h(x))$, τότε:

Παράδειγμα

$$f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x)$$

Αν $f(x) = (3x+2)^4$, τότε με τον κανόνα αλυσίδας:

$$f'(x) = ((3x+2)^4)' = 4(3x+2)^3 \cdot (3x+2)'$$

$$\Rightarrow f'(x) = 4(3x+2)^3 \cdot (3)$$

$$\Rightarrow f'(x) = 12(3x+2)^3$$

Άσκηση

Να υπολογισθεί η παράγωγος $\frac{dy}{dx}$
της συνάρτησης

$$y = \sqrt[3]{x} + \sqrt[5]{x}$$

Λύση

$$\begin{aligned}
 \frac{dy}{dx} &= \frac{d(\sqrt[3]{x} + \sqrt[5]{x})}{dx} \\
 &= \frac{d(\sqrt[3]{x})}{dx} + \frac{d(\sqrt[5]{x})}{dx} \\
 &= \frac{d(x^{1/3})}{dx} + \frac{d(x^{1/5})}{dx} \\
 &= \frac{1}{3}x^{1/3-1} + \frac{1}{5}x^{1/5-1} \\
 \Rightarrow \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{3}x^{-2/3} + \frac{1}{5}x^{-4/5}
 \end{aligned}$$

Ολοκληρώματα

Αόριστο Ολοκλήρωμα:

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

όπου $F'(x)=f(x)$ και C σταθερά ολοκλήρωσης.

Ορισμένο Ολοκλήρωμα:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

με συγκεκριμένα άκρα ολοκλήρωσης

! Βασικοί τύποι ολοκληρωμάτων

1. Ολοκλήρωμα σταθερής συνάρτησης

Αν $f(x)=c$, όπου c είναι σταθερός αριθμός, τότε:

$$\int c dx = cx + C$$

2. Ολοκλήρωμα της συνάρτησης $f(x)=x$

$$\int x dx = \frac{x^2}{2} + C$$

3. Ολοκλήρωμα δύναμης του x

Αν $f(x)=x^n$, τότε:

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad (n \neq -1)$$

4. Ολοκλήρωμα εκθετικής συνάρτησης

$$\int e^x dx = e^x + C$$
$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad (a > 0, a \neq 1)$$

5. Ολοκλήρωμα λογαριθμικής συνάρτησης

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C$$

6. Ολοκλήρωμα τριγωνομετρικών συναρτήσεων

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$
$$\int \cos x dx = \sin x + C$$
$$\int \sec^2 x dx = \tan x + C$$
$$\int \csc^2 x dx = -\cot x + C$$

7. Ολοκλήρωμα αντίστροφων τριγωνομετρικών συναρτήσεων

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$$
$$\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arccos x + C$$

Άσκηση

Βρείτε τα αόριστα ολοκλήρωματα

$$1. \int (3x^2 - 4x + 5) dx$$

$$2. \int \sqrt{x} dx$$

$$3. \int \left(\frac{1-x}{x}\right)^2 dx$$

Λύση

$$\begin{aligned} 1. & \int (3x^2 - 4x + 5) dx \\ &= \int 3x^2 dx - \int 4x dx + \int 5 dx \\ &= 3 \int x^2 dx - 4 \int x dx + \int 5 dx \\ &= 3 \left[\frac{x^3}{3}\right] - 4 \left[\frac{x^2}{2}\right] + 5x + C \\ &= x^3 - 2x^2 + 5x + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. & \int \sqrt{x} dx \\ &= \int x^{\frac{1}{2}} dx \\ &= \left[\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right] + C \\ &= \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C \\ &= \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3. & \int \left(\frac{1-x}{x}\right)^2 dx \\ &= \int \frac{(1-x)^2}{x^2} dx \\ &= \int \frac{1-2x+x^2}{x^2} dx \\ &= \int \frac{1}{x^2} dx + \int \frac{-2x}{x^2} dx + \int \frac{x^2}{x^2} dx \end{aligned}$$

$$= \int x^{-2} dx - 2 \int \frac{1}{x} dx + \int 1 dx$$

$$= \left[\frac{x^{-2+1}}{-2+1} \right] - 2x[\ln x] + [x] + C$$

$$= \frac{x^{-1}}{-1} - 2x \ln x + x + C$$

$$= -\frac{1}{x} - 2x \ln x + x + C$$

Μέθοδοι Ολοκλήρωσης

Μέθοδος Αντικατάστασης

Αν το ολοκλήρωμα έχει τη μορφή $\int f(g(x)) g'(x) dx$ τότε με την αντικατάσταση $u=g(x)$ το ολοκλήρωμα γίνεται απλούστερο: $\int f(u) du$

Η αντικατάσταση είναι μια μέθοδος που χρησιμοποιούμε για να απλοποιήσουμε δύσκολα ολοκληρώματα. Όταν βλέπουμε μια σύνθετη συνάρτηση (π.χ. κάτι μέσα σε παρένθεση, σε ρίζα ή εκθετικό), προσπαθούμε να την αντικαταστήσουμε με μια πιο απλή μεταβλητή u .

Βήματα

Βήμα 1: Εντόπισε το «μέσα»

Κοίτα προσεκτικά το ολοκλήρωμα. Συνήθως υπάρχει μια συνάρτηση μέσα σε άλλη. Αυτή θα είναι το υποψήφιο u .

Βήμα 2: Υπολόγισε το du

Παίρνεις την παράγωγο του u :

$$du = g'(x) dx$$

Βήμα 3: Κάνε την αντικατάσταση

Αντικαθιστάς κάθε $g(x)$ με u , και κάθε dx με την αντίστοιχη μορφή του από το du .

Αυτό σου δείχνει ποια μορφή πρέπει να υπάρχει στο ολοκλήρωμα.

Βήμα 4: Ολοκλήρωσε ως προς u

Τώρα έχεις ένα πολύ πιο απλό ολοκλήρωμα

Βήμα 5: Επαναφορά στο x

Αντικαθιστάς ξανά το u με το αρχικό που είχες θέσει

Άσκηση

Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$I = \int 2x\sqrt{1+x^2} dx.$$

Λύση

$$\text{Θέτω } u=1+x^2$$

Βήμα 1 : Επιλογή u. Βλέπω το εσωτερικό της ρίζας $1+x^2$.

$$du=2x dx$$

$$\Rightarrow dx = \frac{du}{2x}$$

Βήμα 2 :Υπολογισμός du και λύνω ως προς dx

$$\int 2x\sqrt{1+x^2} dx$$

$$= \int \cancel{2x}\sqrt{u} \frac{du}{\cancel{2x}}$$

Βήμα 3 :Αντικατάσταση

$$= \int \sqrt{u} du$$

Βήμα 4:Ολοκλήρωση ως προς u.

$$= \int u^{\frac{1}{2}} du$$

$$= \left[\frac{u^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} \right] + C$$

$$= \left[\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right] + C$$

$$= \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} + C$$

$$= \frac{2}{3} (1+x^2)^{\frac{3}{2}} + C$$

Βήμα 5:Επαναφορά στο x Αντικαθιστώ $u=1+x^2$

Θεωρία Πιθανοτήτων

Τυχαίο πείραμα (πειράματα τύχης)

Ορισμός: Ένα πείραμα του οποίου το αποτέλεσμα δεν μπορούμε να το προβλέψουμε με βεβαιότητα, αλλά γνωρίζουμε όλες τις πιθανές εκβάσεις.

Παράδειγμα: Ρίψη ενός ζαριού. Δεν ξέρουμε τι θα φέρει, αλλά ξέρουμε ότι τα αποτελέσματα είναι οι αριθμοί 1–6.

Δειγματικός χώρος

Συμβολισμός: Ω

Ορισμός: Το σύνολο όλων των δυνατών εκβάσεων ενός τυχαίου πειράματος.

Παράδειγμα: Για ρίψη ζαριού,

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Ενδεχόμενο

Συμβολισμός: Συνήθως με γράμματα κεφαλαία (π.χ. A, B, CA, B, CA, B, C).

Ορισμός: Κάθε υποσύνολο του δειγματικού χώρου. Αν συμβεί μία από τις εκβάσεις που περιέχονται στο σύνολο, τότε λέμε ότι συνέβη το ενδεχόμενο.

Παράδειγμα: Στη ρίψη ζαριού:

- Ενδεχόμενο A: «φέρνουμε άρτιο αριθμό»

$$A = \{2, 4, 6\}$$

- Ενδεχόμενο B: «φέρνουμε αριθμό > 4 »

$$B = \{5, 6\}$$

Πράξεις Ενδεχομένων

Ένωση ($A \cup B$)

Ορισμός: Συμβαίνει όταν συμβεί το A ή το B.

Παράδειγμα:

$$A = \{2, 4, 6\}, B = \{2, 3, 5\},$$

$$A \cup B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$$

Τομή ($A \cap B$)

Ορισμός: Συμβαίνει μόνο αν συμβούν ταυτόχρονα το A και το B.

Παράδειγμα:

$$A = \{2, 4, 6\}, B = \{2, 3, 5\},$$

$$A \cap B = \{2\}$$

Συμπλήρωμα A^c

Ορισμός: Είναι το ενδεχόμενο να μην συμβεί το A αλλά να είναι εντός του δειγματικού χώρου.

Παράδειγμα: $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$, $A = \{2,4,6\}$,
 $A^c = \{1,3,5\}$

Διαφορά δύο ενδεχομένων $A-B$ ($A \cap B^c$)

Ορισμός: Συμβαίνει το A, αλλά όχι το B

Παράδειγμα: $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$,
 $A = \{2,4,6\}$, $B = \{2,3,5\}$,

$A-B = \{4,6\}$

Ασυμβίβαστα Ενδεχόμενα



Δύο ενδεχόμενα A και B λέγονται **ασυμβίβαστα** (ή **ξένα**) αν δεν μπορούν να συμβούν ταυτόχρονα.

$$A \cap B = \emptyset$$

Κανόνες Πράξεων Ενδεχομένων

1. Αντιμεταθετικοί νόμοι

$$A \cup B = B \cup A$$

$$A \cap B = B \cap A$$

2. Προσεταιριστικοί νόμοι

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

3. Επιμεριστικοί νόμοι

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

4. Νόμοι του De Morgan

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

Υπόλοιποι κανόνες

$$A \cup \emptyset = A, A \cap \Omega = A$$

$$A \cup (A \cap B) = A, A \cap (A \cup B) = A$$

$$A \cup A^c = \Omega, A \cap A^c = \emptyset, A(A^c)^c = A$$

Ορισμός Πιθανότητας

Η πιθανότητα ενός ενδεχομένου A είναι το πηλίκο:

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)}$$

$N(A)$ = το πλήθος των ευνοϊκών εκβάσεων για το ενδεχόμενο A ,

$N(\Omega)$ = το πλήθος όλων των δυνατών εκβάσεων (δειγματικός χώρος).

Άσκηση

Ρίχνουμε ένα ζάρι. Να βρεθεί η πιθανότητα να εμφανιστεί άρτιος αριθμός.

Λύση

Δειγματικός χώρος: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Πλήθος όλων των δυνατών εκβάσεων: $N(\Omega) = 6$

Ενδεχόμενο A : «εμφανίζεται άρτιος αριθμός», $A = \{2, 4, 6\}$

Πλήθος ευνοϊκών εκβάσεων: $N(A) = 3$

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)}$$

$$\Rightarrow P(A) = 3/6 = 1/2$$

$$\Rightarrow P(A) = 0.5 = 50\%$$



$$0 \leq P(A) \leq 1$$

$$P(\Omega) = 1$$

Τύποι Πιθανοτήτων

- $$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Αν τα ενδεχόμενα **A** και **B** είναι **ξένα (ασυμβίβαστα)**, δηλαδή $A \cap B = \emptyset$ τότε ο γενικός τύπος για την **ένωση** $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ γίνεται απλούστερος, αφού $P(A \cap B) = 0$

Άρα:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

- $$P(A^c) = 1 - P(A)$$

- $$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$$

Άσκηση

Σε ένα σχολείο συμμετέχουν 30 μαθητές σε δύο διαφορετικά εργαστήρια: Μαθηματικών και Φυσικής. Από αυτούς, 18 μαθητές συμμετέχουν στο εργαστήριο Μαθηματικών, 12 μαθητές στο εργαστήριο Φυσικής, και 5 μαθητές συμμετέχουν και στα δύο εργαστήρια. Επιλέγεται τυχαία ένας μαθητής. Να υπολογίσετε τις πιθανότητες για τα ακόλουθα ενδεχόμενα:

1. Πόσο πιθανό είναι ο μαθητής να συμμετέχει τουλάχιστον σε ένα από τα δύο εργαστήρια;
2. Πόσο πιθανό είναι να συμμετέχει μόνο στο εργαστήριο Μαθηματικών και όχι στο Φυσικής;
3. Πόσο πιθανό είναι να συμμετέχει μόνο στο εργαστήριο Φυσικής και όχι στο Μαθηματικών;
4. Πόσο πιθανό είναι να μην συμμετέχει σε κανένα από τα δύο εργαστήρια;
5. Αν τα εργαστήρια θεωρηθούν ξένα ενδεχόμενα, πώς αλλάζει η πιθανότητα να συμμετέχει σε τουλάχιστον ένα εργαστήριο;
6. Ποια είναι η πιθανότητα να συμμετέχει μόνο στο ένα από τα δύο εργαστήρια ;

Λύση

$$N(\Omega) = 30 \text{ (Σύνολο μαθητών)}$$

$$M = \{\text{Οι μαθητές συμμετέχουν στο εργαστήριο Μαθηματικών}\}, N(M) = 18$$

$$P(M) = \frac{N(M)}{N(\Omega)} = \frac{18}{30}$$

$\Phi = \{\text{Οι μαθητές συμμετέχουν στο εργαστήριο Φυσικής}\}$, $N(\Phi) = 12$

$$P(\Phi) = \frac{N(\Phi)}{N(\Omega)} = \frac{12}{30}$$

$(M \cap \Phi) = \{\text{Οι μαθητές συμμετέχουν και στα δύο εργαστήρια}\}$, $N(M \cap \Phi) = 5$

$$P(M \cap \Phi) = \frac{N(M \cap \Phi)}{N(\Omega)} = \frac{5}{30}$$

1. Τουλάχιστον ένα εργαστήριο ($M \cup \Phi$)

$$P(M \cup \Phi) = P(M) + P(\Phi) - P(M \cap \Phi)$$

$$\Rightarrow P(M \cup \Phi) = \frac{18}{30} + \frac{12}{30} - \frac{5}{30}$$

$$\Rightarrow P(M \cup \Phi) = \frac{25}{30}$$

$$\Rightarrow P(M \cup \Phi) = \frac{5}{6}$$

2. Μόνο Μαθηματικά και όχι Φυσική ($M - \Phi$)

$$P(M - \Phi) = P(M) - P(M \cap \Phi)$$

$$\Rightarrow P(M - \Phi) = \frac{18}{30} - \frac{5}{30}$$

$$\Rightarrow P(M - \Phi) = \frac{13}{30}$$

3. Μόνο Φυσική και όχι Μαθηματικά ($\Phi - M$)

$$P(\Phi - M) = P(\Phi) - P(M \cap \Phi)$$

$$\Rightarrow P(\Phi - M) = \frac{12}{30} - \frac{5}{30}$$

$$\Rightarrow P(\Phi - M) = \frac{7}{30}$$

4. Κανένα εργαστήριο ($(M \cup \Phi)^c$)

$$P((M \cup \Phi)^c) = 1 - P(M \cup \Phi)$$

$$\Rightarrow P((M \cup \Phi)^c) = 1 - \frac{5}{6}$$

$$\Rightarrow P((M \cup \Phi)^c) = \frac{1}{6}$$

5. Ένωση αν τα εργαστήρια ήταν ξένα (ασυμβίβαστα)
 $M \cap \Phi = \emptyset$

$$P(M \cup \Phi) = P(M) + P(\Phi)$$

$$\Rightarrow P(M \cup \Phi) = \frac{18}{30} + \frac{12}{30}$$

$$\Rightarrow P(M \cup \Phi) = \frac{30}{30} = 1$$

6. Μόνο ένα εργαστήριο $((M - \Phi) \cup (\Phi - M))$

$$P((M - \Phi) \cup (\Phi - M)) = P(M - \Phi) + P(\Phi - M)$$

$$\Rightarrow P((M - \Phi) \cup (\Phi - M)) = \frac{13}{30} + \frac{7}{30}$$

$$\Rightarrow P((M - \Phi) \cup (\Phi - M)) = \frac{20}{30}$$

Δεσμευμένη Πιθανότητα

Η δεσμευμένη πιθανότητα ενός ενδεχομένου A , δεδομένου ότι έχει ήδη πραγματοποιηθεί το ενδεχόμενο B , ορίζεται ως:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

A, B : ενδεχόμενα

$P(A)$: πιθανότητα να συμβεί το A

$P(A \cap B)$: πιθανότητα να συμβούν ταυτόχρονα A και B

$P(A|B)$: πιθανότητα να συμβεί το A **δεδομένου** ότι έχει ήδη συμβεί το B

Ιδιότητες

1. $0 \leq P(A|B) \leq 1$
2. Αν A και B είναι ανεξάρτητα, τότε

$$P(A|B) = P(A)$$

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Νόμος ολικής πιθανότητας (με δεσμευμένη):

Αν έχουμε μια διαμέριση του δειγματικού χώρου Ω σε ξένα ενδεχόμενα $A_1, A_2, \dots, A_n$ τότε για οποιοδήποτε ενδεχόμενο B :

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(A_i) \cdot P(B|A_i)$$

Θεώρημα Bayes:

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)}$$