

Πιθανοθεωρία και Στατιστική

Ορισμός Πιθανότητας

Η πιθανότητα ενός ενδεχομένου A είναι το πηλίκο:

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)}$$

$N(A)$ = το πλήθος των ευνοϊκών εκβάσεων για το ενδεχόμενο A,

$N(\Omega)$ = το πλήθος όλων των δυνατών εκβάσεων (δειγματικός χώρος),



Σημειώσεις - Λυμένα Θέματα

e-students.gr

☎ 698 93 94 741

Θεωρία Πιθανοτήτων

Τυχαίο πείραμα (πειράματα τύχης)

Ορισμός: Ένα πείραμα του οποίου το αποτέλεσμα δεν μπορούμε να το προβλέψουμε με βεβαιότητα, αλλά γνωρίζουμε όλες τις πιθανές εκβάσεις.

Παράδειγμα: Ρίψη ενός ζαριού. Δεν ξέρουμε τι θα φέρει, αλλά ξέρουμε ότι τα αποτελέσματα είναι οι αριθμοί 1–6.

Δειγματικός χώρος

Συμβολισμός: Ω

Ορισμός: Το σύνολο όλων των δυνατών εκβάσεων ενός τυχαίου πειράματος.

Παράδειγμα: Για ρίψη ζαριού,

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Ενδεχόμενο

Συμβολισμός: Συνήθως με γράμματα κεφαλαία (π.χ. A, B, CA, B, CA, B, C).

Ορισμός: Κάθε υποσύνολο του δειγματικού χώρου. Αν συμβεί μία από τις εκβάσεις που περιέχονται στο σύνολο, τότε λέμε ότι συνέβη το ενδεχόμενο.

Παράδειγμα: Στη ρίψη ζαριού:

- Ενδεχόμενο A: «φέρνουμε άρτιο αριθμό»

$$A = \{2, 4, 6\}$$

- Ενδεχόμενο B: «φέρνουμε αριθμό > 4 »

$$B = \{5, 6\}$$

Πράξεις Ενδεχομένων

Ένωση ($A \cup B$)

Ορισμός: Συμβαίνει όταν συμβεί το A ή το B.

Παράδειγμα:

$$A = \{2, 4, 6\}, B = \{2, 3, 5\},$$

$$A \cup B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$$

Τομή ($A \cap B$)

Ορισμός: Συμβαίνει μόνο αν συμβούν ταυτόχρονα το A και το B.

Παράδειγμα:

$$A = \{2, 4, 6\}, B = \{2, 3, 5\},$$

$$A \cap B = \{2\}$$



Συμπλήρωμα A^c

Ορισμός: Είναι το ενδεχόμενο να μην συμβεί το A αλλά να είναι εντός του δειγματικού χώρου.

Παράδειγμα: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A = \{2, 4, 6\}$,
 $A^c = \{1, 3, 5\}$

Διαφορά δύο ενδεχομένων $A - B$ ($A \setminus B$)

Ορισμός: Συμβαίνει το A, αλλά όχι το B

Παράδειγμα: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$,
 $A = \{2, 4, 6\}$, $B = \{2, 3, 5\}$,

$A - B = \{4, 6\}$

Ασυμβίβαστα Ενδεχόμενα

Δύο ενδεχόμενα A και B λέγονται **ασυμβίβαστα** (ή **ξένα**) αν δεν μπορούν να συμβούν ταυτόχρονα.

$$A \cap B = \emptyset$$

Κανόνες Πράξεων Ενδεχομένων

1. Αντιμεταθετικοί νόμοι

$$A \cup B = B \cup A$$

$$A \cap B = B \cap A$$

2. Προσεταιριστικοί νόμοι

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

3. Επιμεριστικοί νόμοι

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

4. Νόμοι του De Morgan

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

Υπόλοιποι κανόνες

$$A \cup \emptyset = A, A \cap \Omega = A$$

$$A \cup (A \cap B) = A, A \cap (A \cup B) = A$$

$$A \cup A^c = \Omega, A \cap A^c = \emptyset, A(A^c)^c = A$$

Ορισμός Πιθανότητας

Η πιθανότητα ενός ενδεχομένου A είναι το πηλίκο:

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)}$$

$N(A)$ = το πλήθος των ευνοϊκών εκβάσεων για το ενδεχόμενο A ,

$N(\Omega)$ = το πλήθος όλων των δυνατών εκβάσεων (δειγματικός χώρος).

Άσκηση

Ρίχνουμε ένα ζάρι. Να βρεθεί η πιθανότητα να εμφανιστεί άρτιος αριθμός.

Λύση

Δειγματικός χώρος: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Πλήθος όλων των δυνατών εκβάσεων: $N(\Omega) = 6$

Ενδεχόμενο A : «εμφανίζεται άρτιος αριθμός», $A = \{2, 4, 6\}$

Πλήθος ευνοϊκών εκβάσεων: $N(A) = 3$

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)}$$

$$\Rightarrow P(A) = 3/6 = 1/2$$

$$\Rightarrow P(A) = 0.5 = 50\%$$



$$0 \leq P(A) \leq 1$$

$$P(\Omega) = 1$$

Τύποι Πιθανοτήτων



- $$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Αν τα ενδεχόμενα **A** και **B** είναι **ξένα (ασυμβίβαστα)**, δηλαδή $A \cap B = \emptyset$ τότε ο γενικός τύπος για την **ένωση** $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ γίνεται απλούστερος, αφού $P(A \cap B) = 0$

Άρα:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

- $$P(A^c) = 1 - P(A)$$

- $$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$$

Άσκηση

Σε ένα σχολείο συμμετέχουν 30 μαθητές σε δύο διαφορετικά εργαστήρια: Μαθηματικών και Φυσικής. Από αυτούς, 18 μαθητές συμμετέχουν στο εργαστήριο Μαθηματικών, 12 μαθητές στο εργαστήριο Φυσικής, και 5 μαθητές συμμετέχουν και στα δύο εργαστήρια. Επιλέγεται τυχαία ένας μαθητής. Να υπολογίσετε τις πιθανότητες για τα ακόλουθα ενδεχόμενα:

1. Πόσο πιθανό είναι ο μαθητής να συμμετέχει τουλάχιστον σε ένα από τα δύο εργαστήρια;
2. Πόσο πιθανό είναι να συμμετέχει μόνο στο εργαστήριο Μαθηματικών και όχι στο Φυσικής;
3. Πόσο πιθανό είναι να συμμετέχει μόνο στο εργαστήριο Φυσικής και όχι στο Μαθηματικών;
4. Πόσο πιθανό είναι να μην συμμετέχει σε κανένα από τα δύο εργαστήρια;
5. Αν τα εργαστήρια θεωρηθούν ξένα ενδεχόμενα, πώς αλλάζει η πιθανότητα να συμμετέχει σε τουλάχιστον ένα εργαστήριο;
6. Ποια είναι η πιθανότητα να συμμετέχει μόνο στο ένα από τα δύο εργαστήρια ;

Λύση

$$N(\Omega) = 30 \text{ (Σύνολο μαθητών)}$$

$$M = \{\text{Οι μαθητές συμμετέχουν στο εργαστήριο Μαθηματικών}\}, N(M) = 18$$

$$P(M) = \frac{N(M)}{N(\Omega)} = \frac{18}{30}$$

$\Phi = \{\text{Οι μαθητές συμμετέχουν στο εργαστήριο Φυσικής}\}$, $N(\Phi) = 12$

$$P(\Phi) = \frac{N(\Phi)}{N(\Omega)} = \frac{12}{30}$$



$(M \cap \Phi) = \{\text{Οι μαθητές συμμετέχουν και στα δύο εργαστήρια}\}$, $N(M \cap \Phi) = 5$

$$P(M \cap \Phi) = \frac{N(M \cap \Phi)}{N(\Omega)} = \frac{5}{30}$$

1. Τουλάχιστον ένα εργαστήριο ($M \cup \Phi$)

$$P(M \cup \Phi) = P(M) + P(\Phi) - P(M \cap \Phi)$$

$$\Rightarrow P(M \cup \Phi) = \frac{18}{30} + \frac{12}{30} - \frac{5}{30}$$

$$\Rightarrow P(M \cup \Phi) = \frac{25}{30}$$

$$\Rightarrow P(M \cup \Phi) = \frac{5}{6}$$

2. Μόνο Μαθηματικά και όχι Φυσική ($M - \Phi$)

$$P(M - \Phi) = P(M) - P(M \cap \Phi)$$

$$\Rightarrow P(M - \Phi) = \frac{18}{30} - \frac{5}{30}$$

$$\Rightarrow P(M - \Phi) = \frac{13}{30}$$

3. Μόνο Φυσική και όχι Μαθηματικά ($\Phi - M$)

$$P(\Phi - M) = P(\Phi) - P(M \cap \Phi)$$

$$\Rightarrow P(\Phi - M) = \frac{12}{30} - \frac{5}{30}$$

$$\Rightarrow P(\Phi - M) = \frac{7}{30}$$

4. Κανένα εργαστήριο ($(M \cup \Phi)^c$)

$$P((M \cup \Phi)^c) = 1 - P(M \cup \Phi)$$

$$\Rightarrow P((M \cup \Phi)^c) = 1 - \frac{5}{6}$$

$$\Rightarrow P((M \cup \Phi)^c) = \frac{1}{6}$$

5. Ένωση αν τα εργαστήρια ήταν ξένα (ασυμβίβαστα)
 $M \cap \Phi = \emptyset$

$$P(M \cup \Phi) = P(M) + P(\Phi)$$

$$\Rightarrow P(M \cup \Phi) = \frac{18}{30} + \frac{12}{30}$$

$$\Rightarrow P(M \cup \Phi) = \frac{30}{30} = 1$$

6. Μόνο ένα εργαστήριο $((M - \Phi) \cup (\Phi - M))$

$$P((M - \Phi) \cup (\Phi - M)) = P(M - \Phi) + P(\Phi - M)$$

$$\Rightarrow P((M - \Phi) \cup (\Phi - M)) = \frac{13}{30} + \frac{7}{30}$$

$$\Rightarrow P((M - \Phi) \cup (\Phi - M)) = \frac{20}{30}$$