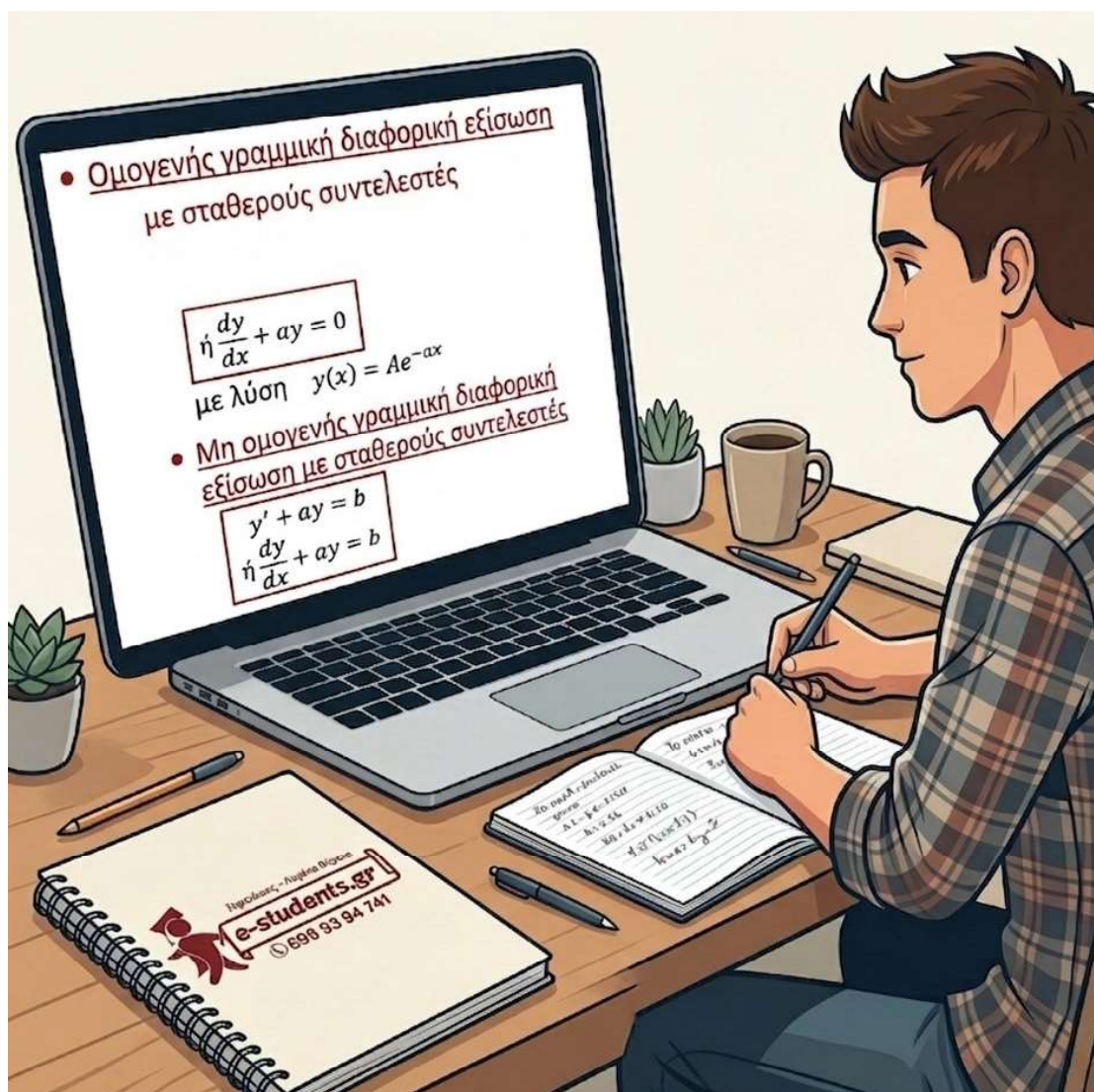


Μαθηματικά ΙΙΙ



● Ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση
με σταθερούς συντελεστές

$$y' + ay = 0$$
$$\text{ή } \frac{dy}{dx} + ay = 0$$



με λύση $y(x) = Ae^{-ax}$

● Μη ομογενής γραμμική διαφορική
εξίσωση με σταθερούς συντελεστές

$$y' + ay = b$$
$$\text{ή } \frac{dy}{dx} + ay = b$$



με λύση $y(x) = Ae^{-ax} + \frac{b}{a}$

● Εφαρμογή

Να λυθεί η διαφορική εξίσωση $y' + 5y = 0$

Λύση

$$y(x) = Ae^{-ax} \Rightarrow y(x) = Ae^{-5x}$$

● Εφαρμογή

Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$y' + 2y = 6, \quad y(0) = 1$$

Λύση

$$y(x) = Ae^{-ax} + \frac{b}{a}$$

$$\Rightarrow y(x) = Ae^{-2x} + 3$$

$$y(0) = 1$$

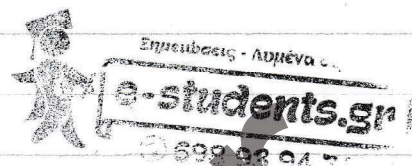
$$\Rightarrow 1 = Ae^0 + 3 \Rightarrow 1 - 3 = A$$

$$\Rightarrow A = -2$$

$$y(x) = -2e^{-2x} + 3$$

● Γραμμική ομογενής διαφορική
Εξίσωση 1ης τάξης και 1ου βαθμού

$$y' + u(x)y = 0$$
$$\text{ή } \frac{dy}{dx} + u(x)y = 0$$



με λίστη

$$y(x) = Ae^{-\int u(x) dx}$$

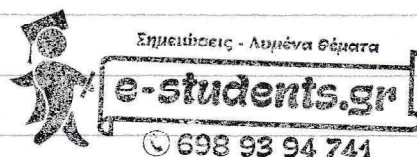
● Εφαρμογή

Να λυθεί η διαφορική Εξίσωση

$$y' + 2xy = 0$$

Λίστη

$$y(x) = Ae^{-\int u(x) dx} \Rightarrow y(x) = Ae^{-\int 2x dx}$$
$$y(x) = Ae^{-\frac{2x^2}{2}}$$
$$y(x) = Ae^{-x^2}$$



● Γραμμική Διαφορική Εξίσωση

Πρώτης τάξης

$$y' + p(x)y = q(x)$$



Σημειώσεις - Λυμένα Θέματα

e-students.gr

© 698 93 94 741

με λύση

$$y(x) = e^{-\int p(x) dx} \left[C + \int q(x) e^{\int p(x) dx} dx \right]$$

● Εφαρμογή

Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$y' - 2y = x$$

Λύση

$$p(x) = -2, q(x) = x$$

$$y(x) = e^{-\int p(x) dx} \left[C + \int q(x) e^{\int p(x) dx} dx \right]$$

$$\bullet \int p(x) dx = \int -2 dx = -2x \quad \textcircled{1}$$

$$\bullet \int q(x) e^{\int p(x) dx} dx = \int x \cdot e^{-2x} dx \stackrel{\text{Π.Ο.}}{=} -\frac{1}{2} \int x \cdot e^{-2x}' dx$$



Σημειώσεις - Λυμένα Θέματα

e-students.gr

© 698 93 94 741



Σημειώσεις - Λυμένα Θέματα

e-students.gr

© 698 93 94 741

$$= -\frac{1}{2} [x \cdot e^{-2x} - \int (x)' \cdot e^{-2x} dx]$$

$$= -\frac{1}{2} [x e^{-2x} - \int e^{-2x} dx]$$



$$= -\frac{1}{2} [x \cdot e^{-2x} + \frac{1}{2} e^{-2x}]$$

$$= -\frac{1}{2} x e^{-2x} - \frac{1}{4} e^{-2x} \textcircled{2}$$

$$y(x) = e^{-\int p(x) dx} \left[\int + \int q(x) e^{\int p(x) dx} dx \right]$$

$$\textcircled{1} \Rightarrow y(x) = e^{-(-2x)} \left[\int + \left[-\frac{1}{2} x e^{-2x} - \frac{1}{4} e^{-2x} \right] \right]$$



● Εξίσωση Bernoulli

$$\frac{dy}{dx} + p(x) \cdot y = q(x) \cdot y^a$$

Θέτω $u(x) = y^{1-a}$



● Εφαρμογή

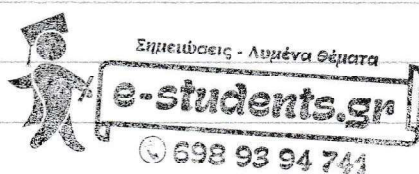
Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$y + xy' - (x \ln x) y^2 = 0$$

Λύση

$$y + xy' - (x \ln x) y^2 = 0$$

$$\Rightarrow xy' + y = (x \ln x) y^2$$



$$\Rightarrow y' + \frac{1}{x} y = \frac{(x \ln x) y^2}{x}$$

$$\Rightarrow y' + \frac{1}{x} y = \ln x \cdot y^2 \rightarrow \text{Bernoulli}$$

$\underbrace{\hspace{1cm}}_{p(x)} \quad \underbrace{\hspace{1cm}}_{q(x)} \quad \underbrace{\hspace{1cm}}_a$

ΘΕΤΩ $u(x) = y^{1-a}$

$$u(x) = y^{2-2} \Rightarrow u(x) = y^{-1}$$

$$u(x) = \frac{1}{y} \Rightarrow y = \frac{1}{u} = u^{-1} \Rightarrow \boxed{y = u^{-1}} \quad (1)$$

$$\frac{dy}{dx} = -1 u^{-2} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -u^{-2} \frac{du}{dx} \Rightarrow \boxed{y' = -u^{-2} u'} \quad (2)$$

$$y' + \frac{1}{x} y = \ln x y^2$$

$$\stackrel{(1)}{\Rightarrow} -u^{-2} u' + \frac{1}{x} u = \ln x (u^{-1})^2$$

$$\stackrel{(2)}{\Rightarrow} \frac{-u^{-2} u' + \frac{1}{x} u}{(-u^{-2})} = \ln x \left(\frac{u^{-2}}{-u^{-2}} \right)$$

$$\Rightarrow u' - \frac{1}{x} u = -\ln x$$

$$\Rightarrow \boxed{u' - \frac{1}{x} u = -\ln x}$$

$\underbrace{\hspace{1cm}}$
 $p(x)$

$\underbrace{\hspace{1cm}}$
 $q(x)$

γραμμική διαφορική
Εξίσωση της
μορφής $y' + p(x)y = q(x)$

Εμπειρία - Απλά Σήματα

e-students.gr

698 93 94 741

Εμπειρία - Απλά Σήματα

e-students.gr

698 93 94 741

$$u(x) = e^{-\int p(x) dx} \left[C + \int q(x) e^{\int p(x) dx} dx \right]$$

$$\cdot \int p(x) dx = \int -\frac{1}{x} dx = \ln x$$



Εμπειροεις - Αριστερά Θέματα

e-students.gr

© 698 93 94 741

$$\cdot \int q(x) e^{\int p(x) dx} dx = \int -\ln x \cdot e^{-\ln x} dx$$

$$\frac{e^{-\ln x}}{e^{-\ln x}} = - \int \frac{\ln x}{x} dx$$



Εμπειροεις - Αριστερά Θέματα

e-students.gr

© 698 93 94 741

Θέτω $h = \ln x$
 $dh = \frac{1}{x} dx = p dx = dh \cdot x$

$$= - \int \frac{h}{x} \cdot x dh = - \frac{h^2}{2} = - \frac{(\ln x)^2}{2}$$

$$u(x) = e^{-(\ln x)} \left[C + \left(-\frac{(\ln x)^2}{2} \right) \right]$$



Εμπειροεις - Αριστερά Θέματα

e-students.gr

© 698 93 94 741

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{1}{y(x)} \\ \Rightarrow \frac{1}{y(x)} &= x \left[C - \frac{1}{2} (\ln x)^2 \right] \\ \Rightarrow y(x) &= \frac{1}{x \left[C - \frac{1}{2} (\ln x)^2 \right]} \end{aligned}$$