

Γραμμική Άλγεβρα



● Πινάκας



Σημειώσεις - Λυμένα θέματα

e-students.gr

© 698 93 94 741

Πίνακας ονομάζουμε μια ορθογώνια διάταξη $m \times n$ αριθμών σε m γραμμές και n στήλες.

$$A_{m \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{mj} & & & a_{mn} \end{bmatrix}$$



Σημειώσεις - Λυμένα θέματα

e-students.gr

© 698 93 94 741

● Τετραγωνικός Πίνακας

Περιέχει τον ίδιο αριθμό γραμμών και στήλων, είναι δηλαδή μέγεθος $n \times n$ με $n \in \mathbb{N}$.

Παράδειγμα: $A_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

● Μοναδιαίος Πίνακας

$$I_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad I_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ΚΑΤΗΧΟΡΙΕΣ ΤΕΤΡΑΧΥΜΑΤΩΝ ΤΡΙΩΝΥΜΩΝ

→ ΔΙΑΓΩΝΙΩΣ

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}$$



Σημειώσεις - Ασκήσεις Θέματα

e-students.gr

© 698 93 94 741

→ Άνω Τριγωνικός

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}$$

→ Κάτω Τριγωνικός

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$



Σημειώσεις - Ασκήσεις Θέματα

e-students.gr

© 698 93 94 741

→ Συμμετρικός ($a_{ij} = a_{ji}$)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 8 \\ 5 & 3 & -2 \\ 8 & -2 & 9 \end{bmatrix}$$

$$(A^T = A)$$

→ Αντισυμμετρικός ($a_{ij} = -a_{ji}$)

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 5 & -3 \\ -5 & 0 & 9 \\ 3 & -9 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(A^T = -A)$$



Σημειώσεις - Λυμένα θέματα

e-students.gr

© 698 93 94 741

→ Ανάστροφος Πίνακας A^T

Εστω ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -6 \\ 1 & 9 \end{bmatrix}$

τότε ο ανάστροφος του A είναι

$$A^T = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & -6 & 9 \end{bmatrix}$$



Σημειώσεις - Λυμένα θέματα

e-students.gr

© 698 93 94 741

→ Ορθογώνιος Πίνακας

Ορθογώνιος λέγεται ο $n \times n$ τετραγωνικός πίνακας για τον οποίο ισχύει $A^T \cdot A = A \cdot A^T = I$



Σημειώσεις - Λυμένα θέματα

e-students.gr

© 698 93 94 741

→ Κανονικός Πίνακας

Κανονικός λέγεται ο $n \times n$ τετραγωνικός πίνακας για τον οποίο ισχύει $AA^T = A^T A = I$



Ενός τετραγωνικού πίνακα A προκύπτει από το άθροισμα των στοιχείων που απρέχουν την διαγώνιο του A .

π.χ

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 2 & -6 & 7 \\ 1 & 9 & -2 \end{bmatrix}$$



$$\text{tr}(A) = 3 + (-6) + (-2) = -5.$$

Πρόσθεση Πινάκων

$$A+B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 5 & 3 \\ 7 & -6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 10 \\ 6 & -3 \\ -8 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+3 & -2+10 \\ 5+6 & 3+(-3) \\ 7+(-8) & -6+3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 11 & 0 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$$

Πολλαπλασιασμός Πινάκων



Σημειώσεις - Λυμένα Θέματα

e-students.gr

© 698 93 94 741

Π.χ

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 & 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 \\ 3 \cdot 0 + 4 \cdot 1 & 3 \cdot 2 + 4 \cdot 1 \end{bmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 10 \end{bmatrix}$$



Σημειώσεις - Λυμένα Θέματα

e-students.gr

© 698 93 94 741

Παρατήρηση :

- 1) $A \cdot B \neq B \cdot A$
- 2) $A_{2 \times 2} \cdot B_{2 \times 3} = AB_{2 \times 3}$

Πολλαπλασιασμός αριθμού - Πίνακα

Π.χ

$$3 \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 5 & 3 \\ 7 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \cdot 1 & 3 \cdot (-2) \\ 3 \cdot 5 & 3 \cdot 3 \\ 3 \cdot 7 & 3 \cdot (-6) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ 15 & 9 \\ 21 & -18 \end{bmatrix}$$

● Ορίσμος det n 1)

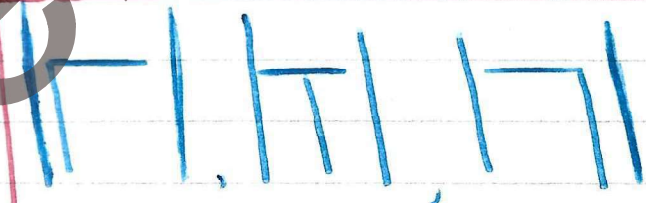
Δεύτερος τάξης Ορίσμος

$$A_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 5 \cdot 4 - 3 \cdot 2 = 14$$

Τρίτης τάξης Ορίσμος

$$A_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$



$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 1(2 \cdot 3 - 1 \cdot 2) - 3[(-1) \cdot 3 - 1 \cdot 4] + 2[(-1) \cdot 2 - 2 \cdot 4]$$

$$= 1(6 - 2) - 3(-3 - 4) + 2(-2 - 8)$$

$$= 1(4) - 3(-7) + 2(-10) = 4 + 21 - 20 = 5.$$

Ορίσμος $n \times m$ Πινάκας

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & & & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$



$$\det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} A'_{ij}$$

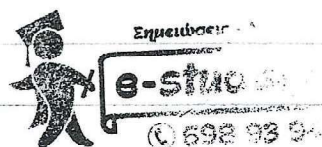
Εφαρμογή

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & -2 \\ 4 & -3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$



$$\det(A) = 1 \begin{vmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \\ -3 & 0 & 2 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \\ 4 & 0 & 2 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & -2 \\ 4 & -3 & 2 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & 1 \\ 4 & -3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \cdot (-16) - 2 \cdot 30 + 2(-8) - 3 \cdot (13)$$



$$= -16 - 60 - 16 - 39 = \underline{\underline{-131}}$$

● Πρόταση 1

Αντιστοίχοι $n \times n$ πίνακες έχουν την ίδια ορίζουσα $\det A = \det A^T$



Εμπειρίες - Λυμένα Θέματα

e-students.gr

© 698 93 94 741

● Πρόταση 2

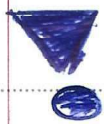
1. Αν ο πίνακας A έχει μια μηδενική γραμμή (ή στήλη) τότε $\det A = 0$
2. Αν ο πίνακας A έχει δύο ίδιες γραμμές (ή στήλες) τότε $\det A = 0$
3. Αν ο πίνακας A είναι ανώγιο τριγωνικός (ή κατώγιο τριγωνικός) τότε η ορίζουσα του A είναι το γινόμενο των διαγωνίων στοιχείων
4. Αν ο πίνακας B προκύπτει από τον A με πολλαπλασιασμό μίας γραμμής (ή στήλης) με ένα k τότε $\det B = k \det A$



Εμπειρίες - Λυμένα Θέματα

e-students.gr

© 698 93 94 741



Ένας πίνακας A ονομά-
ζεται ιδιάων ή μη ομαλός
αν $\det A = 0$ και ονομάζεται
ομαλός ή μη ιδιάων αν
 $\det A \neq 0$



Σημειώσεις - Λυμένα θέματα

e-students.gr

☎ 698 93 94 741

● Αντίστροφος Πίνακας



A^{-1}

Αντίστροφος 2x2

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \quad A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Π.χ

Έστω ο Πίνακας $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$

Ποιος ο αντίστροφος $A^{-1} = ?$

1^{ον}

$$|A| = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 5 \cdot 2 - 3 \cdot 4 = 10 - 12 = -2$$



$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 5 \end{bmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & \frac{3}{2} \\ 2 & -\frac{5}{2} \end{bmatrix}$$